Novo Espaço – Matemática A, 12.º ano
Proposta de teste de avaliação [novembro – 2020]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\sqrt{x^2+x}$.

Sabe-se que o gráfico da função f tem uma assíntota do tipo $y=mx+b$.

Mostra que $m+b=\frac{3}{2}$.

2. Considera a função, de domínio $\mathbb{R}_0^+$, definida por $f(x)=\sqrt{x}$.

2.1. Determina $f'(4)$, pela definição de derivada de uma função num ponto.

2.2. No desenvolvimento de $\left(f(x)-f(1)\right)^7$ há um termo de grau 2. Determina esse termo.

3. Os Jogos Santa Casa, para comemorarem os 500 anos dos Correios em Portugal, lançaram uma edição da Lotaria Clássica.

A figura representa uma fotografia de uma fração dessa edição da Lotaria.

O número da fração é **4 9 4 7 5**.

Utilizando exatamente os cinco algarismos do número 49 475, quantos números diferentes é possível representar?

(A) 60 **(B)** 30 **(C)** 120 **(D)** 90

4. Considera o Triângulo de Pascal.

4.1. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o 5.º e o 11.º elementos são iguais.

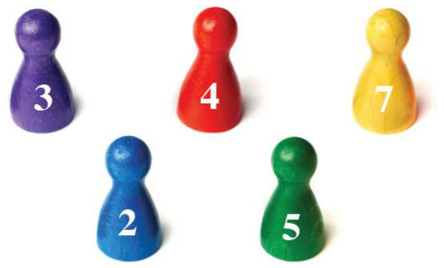
Qual é o valor do 8.º elemento dessa linha?

(A) 3432 **(B)** 3003 **(C)** 2002 **(D)** 3230

4.2. Numa outra linha do Triângulo de Pascal, a soma dos três primeiros elementos com os dois últimos é 172.

Determina a soma de todos os elementos dessa linha?

5. Na figura estão representados cinco peões que fazem parte de um jogo.



Cor do peão	Número do peão
Azul	2
Roxo	3
Vermelho	4
Verde	5
Amarelo	7

5.1. Os cinco peões vão ser dispostos, lado a lado, tal como é sugerido na figura.

Quantas disposições diferentes, atendendo às cores dos peões, é possível obter, de modo que o peão azul fique à esquerda do peão vermelho?

Nota: Na figura está exemplificada uma situação em que o peão azul está à esquerda do peão vermelho.

5.2. Os cinco peões foram colocados numa caixa e, ao acaso, foram retirados, de uma só vez, três peões.

Determina a probabilidade de a soma dos números do peões retirados ser um número ímpar.

Apresenta o resultado em percentagem.

6. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega$).

Sabe-se que:

- $P(B|A) = \frac{1}{2}$ (probabilidade condicionada)
- $P(\overline{B}) = P(A)$
- $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$

Qual é o valor de $P(B \cap \overline{A})$?

(A) $\frac{1}{2}$ **(B)** $\frac{5}{6}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** $\frac{1}{3}$

7. Numa escola, para minimizar a aglomeração de alunos à entrada, foi estabelecido um plano, distribuindo os alunos por duas entradas, E_1 e E_2.

Num certo dia, entraram na escola 480 alunos (do ensino básico e do ensino secundário), distribuindo-se da seguinte forma:

- pela entrada $\boldsymbol{E_1}$: 250 alunos, sendo 170 do ensino básico e os restantes do ensino secundário;
- pela entrada $\boldsymbol{E_2}$: restantes alunos.

Escolhe-se, ao acaso, um dos alunos que entraram na escola nesse dia.
Sejam A e B os acontecimentos:
A: "O aluno escolhido é do ensino básico."
B: "O aluno escolhido utilizou a entrada E_2."

Sabendo que $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}15$, determina o valor da probabilidade condicionada $P\left(A \mid B\right)$.

Apresenta o resultado na forma de número decimal arredondado às centésimas.

FIM

Cotações											Total
Questões	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	
Pontos	20	20	25	15	15	25	20	25	15	20	**200**

1. Equação da assíntota: $y = mx + b$

$$m = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+x}}{x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \sqrt{1+\frac{1}{x}} = 1$$

$$b = \lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - mx\right) = \lim_{x\to+\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right) \overset{\infty-\infty}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)\left(\sqrt{x^2+x}+x\right)}{\sqrt{x^2+x}+x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x} \overset{\frac{\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

Como $m = 1$ e $b = \frac{1}{2}$, $m + b = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$.

2.

2.1. $$f'(4) = \lim_{x\to 4} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x\to 4} \frac{\sqrt{x}-2}{x-4} \overset{\frac{0}{0}}{=} \lim_{x\to 4} \frac{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} = \lim_{x\to 4} \frac{x-4}{(x-4)\left(\sqrt{x}+2\right)} =$$

$$= \lim_{x\to 4} \frac{1}{\sqrt{x}+2} = \frac{1}{4}$$

Resposta: $f'(4) = \frac{1}{4}$

2.2. $$\left(f(x) - f(1)\right)^7 = \left(\sqrt{x}-1\right)^7 = \sum_{k=0}^{7} \left({}^7C_k \left(\sqrt{x}\right)^{7-k} (-1)^k\right)$$

$$\left({}^7C_k \left(\sqrt{x}\right)^{7-k} (-1)^k\right) = (-1)^k \, {}^7C_k x^{\frac{7-k}{2}}$$

O termo de grau 2 resulta quando $\frac{7-k}{2} = 2$, ou seja, para $k = 3$.

O termo de grau 2 é $(-1)^3 \times {}^7C_3 x^2 = -35x^2$.

Resposta: $-35x^2$

3. ${}^5C_2 = 10$ (número de "posições" para os dois algarismos 4)

$3! = 6$ (permutações dos restantes três algarismos (diferentes) pelas posições não ocupadas pelos algarismos 4)

${}^5C_2 \times 3! = 60$

Resposta: **(A)** 60

4.

4.1. Do 5.º ao 11.º elemento (incluindo estes), existem 7 elementos.

Antes do 5.º elemento, existem 4 elementos.

Logo, depois do 11.º elemento, existem 4 elementos.

No total, a linha tem 15 elementos $(4+7+4)$, pelo que a linha é:

$$^{14}C_0 \quad ^{14}C_1 \quad \cdots \quad ^{14}C_{14}$$

O 8.º elemento é $^{14}C_7 = 3432$.

Resposta: **(A)** 3432

4.2. $\left(^nC_0 + {^nC_1} + {^nC_2}\right) + \left(^nC_{n-1} + {^nC_n}\right) = 172$

$$\left(1+n+\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)+(n+1)=172 \Leftrightarrow 2n+2+\frac{(n-1)n}{2}=172 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2+3n-340=0 \Leftrightarrow n=\frac{-3\pm\sqrt{9+1360}}{2} \Leftrightarrow n=\frac{-3\pm 37}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n=17 \ \vee \ n=-20$$

No contexto, $n=17$.

A soma de todos os elementos dessa linha é dada por 2^{17} , ou seja, 131 072.

Resposta: 131 072

5.

5.1. Admitam-se as “posições” numeradas:

1	2	3	4	5

- Vermelho na “posição” 1:

1	2	3	4	5
V				

  Há 0 maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho

- Vermelho na “posição” 2:

1	2	3	4	5
	V			

  Há $1\times 3!=6$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

- Vermelho na “posição” 3:

1	2	3	4	5
		V		

  Há $2\times 3!=12$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

- Vermelho na "posição" 4:

1	2	3	4	5
			V	

Há $3\times 3! = 18$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

- Vermelho na "posição" 5:

1	2	3	4	5
				V

Há $4\times 3! = 24$ maneiras de o azul ficar à esquerda do vermelho.

No total, há 60 maneiras diferentes (6 + 12 + 18 + 24) de o peão azul ficar à esquerda do peão vermelho.

Resposta: 60

5.2. A soma dos números dos três peões é ímpar se:

- os três tiverem número ímpar

ou

- dois tiverem número par e o outro um número ímpar.

Número de casos favoráveis: ${}^{3}C_{3} + {}^{3}C_{1} \times {}^{2}C_{2} = 1 + 3\times 1 = 4$

Número de casos possíveis. ${}^{5}C_{3} = 10$.

Seja p a probabilidade pedida.

$$p = \frac{4}{10} = 0,4$$

A probabilidade é 40% .

Resposta: 40%

6.

$$P(B|A)=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{P(B\cap A)}{P(A)}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow P(A)=2P(B\cap A)$$

Como $P(B\cap A)=\frac{1}{6}$, tem-se que $P(A)=2\times\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$

$P(\overline{B})=P(A)=\frac{1}{3}$. Então, $P(B)=\frac{2}{3}$.

$$P(B\cap\overline{A})=P(B\setminus(A\cap B))=P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$$

Resposta: (A) $\frac{1}{2}$

7. A partir da informação dada, preenche-se a seguinte tabela:

	Ensino básico A	Ensino secundário $\overline{A}$	
Entrada E_1 $\overline{B}$	170	$\#(\overline{A}\cap\overline{B})$	250
Entrada E_2 B	$\#(A\cap B)$	$\#(\overline{A}\cap B)$	230
			480

$$\#(\overline{A}\cap\overline{B})=250-170=80$$

$$P(\overline{A}\cap B)=\frac{\#(\overline{A}\cap B)}{480}=0{,}15$$

Daqui resulta que $\#(\overline{A}\cap B)=72$.

Assim, $\#(A\cap B)=230-72=158$.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{158}{480}}{\frac{230}{480}}=\frac{158}{230}$$

$$P(A|B)\approx 0{,}69$$

Resposta: 0,69