Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2020/2021)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

3.º Período | 15/06/2021 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O campeonato do mundo de seleções em hóquei no gelo de 2021, foi disputado na Letónia e na Bielorrússia.

Sabe-se que, no início da primeira fase do campeonato:

- $81{,}25\%$ das seleções eram europeias;
- metade das seleções já tinha ganhado, anteriormente, o campeonato do mundo;
- das seleções que nunca tinham ganhado um campeonato do mundo, $8{,}75\%$ eram não europeias.

Escolhe-se, ao acaso, uma seleção de hóquei no gelo presente na primeira fase do campeonato.

Qual é a probabilidade de ela ser europeia e ter ganhado, anteriormente, um campeonato do mundo?

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

2. Do desenvolvimento de $(x+1)^{2025}$ resulta um polinómio reduzido.

Qual é o termo de grau 2021 desse polinómio?

(A) $2025x^{2021}$ **(B)** ${}^{2025}C_2\, x^{2021}$ **(C)** ${}^{2025}C_3\, x^{2021}$ **(D)** ${}^{2025}C_4\, x^{2021}$

3. Seja f a função, de domínio $\left]-\frac{\pi}{2},0\right[$, definida por $f(x)=x^2-\operatorname{sen}(2x)-1$.

3.1. Mostre que a função f tem pelo menos um zero.

3.2. Estude a função f quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, caso este(s) exista(m).

4. Considere as funções f e g, ambas de domínio $\mathbb{R}$, definidas por:

$$f(x)=3x-e^{-x} \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases} k+\dfrac{x}{\sqrt{-x}} & \text{se } x<0 \\ f(x) & \text{se } x\geq 0 \end{cases}.$$

4.1. Calcule, usando a definição de derivada, $f'(0)$.

4.2. Sabe-se que a função g é contínua em $x=0$.

Qual é o valor de k ?

(A) -1 **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** 2

4.3. O gráfico de f tem uma assíntota oblíqua quando $x\to+\infty$.
Determine uma equação dessa assíntota.

5. É dada a função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definida por $g(x)=\dfrac{\ln(5x^2+1)}{x}$.

5.1. Justifique que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico da função g.

5.2. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=\frac{1}{x}$.

Sabe-se que a equação $(h\circ g)(x)=2x$ tem exatamente uma solução em $]0,1]$.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essa solução, arredondada às centésimas.

Na sua resposta, deve:

- apresentar uma expressão simplificada da função $h\circ g$;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar o ponto relevante para responder à questão colocada.

6. Considere, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, os números $z=x+yi$ e $w=\bar{z}-2iz+i\,\mathrm{Re}(z)$.

O conjunto dos afixos do número z para os quais w é um número real, é:

(A) o eixo real;

(B) o eixo imaginário;

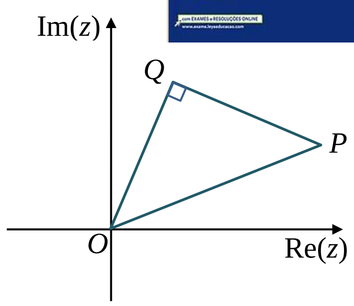
(C) a bissetriz dos quadrantes pares;

(D) a bissetriz dos quadrantes ímpares.

7. Considere, no plano complexo da figura, o triângulo isósceles $[OPQ]$, retângulo em Q.

Sabe-se que o ponto P é o afixo do complexo $\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{8}}$.

A que é igual o número complexo cujo afixo é o ponto Q ?



(A) $e^{i\frac{5\pi}{16}}$ **(B)** $\sqrt{2}\,e^{i\frac{3\pi}{8}}$

(C) $e^{i\frac{3\pi}{8}}$ **(D)** $\sqrt{2}\,e^{i\frac{5\pi}{16}}$

8. Considere em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, $w = 3e^{i\frac{\pi}{5}}$, $z_1 = 6\sqrt{2}\,e^{i\left(-\frac{7\pi}{15}\right)}$ e $z_2 = w \times \left(\overline{-\sqrt{2} + \sqrt{6}\,i}\right)$.

8.1. Em que quadrante fica o afixo do simétrico do conjugado do número w ?

(A) No 1.º quadrante

(B) No 2.º quadrante

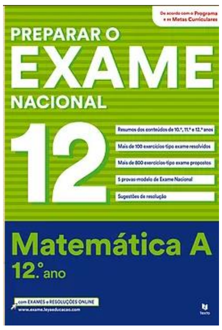
(C) No 3.º quadrante

(D) No 4.º quadrante

8.2. Determine, em extensão, o conjunto $A = \left\{ z \in \mathbb{C} : z^3 = w \right\}$, apresentando as soluções na forma trigonométrica.

8.3. Verifique se z_1 e z_2 são iguais.

FIM



COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	
18	8	14	21	14	8	18	18	18	8	8	8	21	18	**200**

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r – *raio*)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\,\cos b+\operatorname{sen}b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen}a\,\operatorname{sen}b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\,e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $\quad(k\in\{0,\ldots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen}u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen}u$

$(\operatorname{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$