Escola Secundária de Francisco Franco (2015/2016)

www.esffranco.edu.pt

6.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

3.º Período 30/05/16 Duração: 120 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$:

- o plano α de equação $4x - 4y + 2z = 1$
- as retas r, s, t e u definidas respetivamente por

$$\frac{x}{2} = \frac{1-y}{2} = z - 7\,,\quad 4 - x = y - 4 = 2 - z\,,\quad (x,y,z) = k\left(1,-1,\tfrac{1}{2}\right), k \in \mathbb{R} \ \text{ e } \ (x,y,z) = k(-4,4,-2), k \in \mathbb{R}$$

Escolhem-se três das retas anteriores ao acaso.

Qual é a probabilidade de pelo menos duas delas serem perpendiculares ao plano α?

(A) 0 **(B)** $\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2}{3}$ **(D)** 1

2. Considere a função real g, de domínio $[1,5]$

Para que a equação $g(x) = 0$ seja possível, é necessário que:

(A) g seja derivável em $[1,5]$ e que $g(1) \times g(5) > 0$

(B) g seja derivável em $[1,5]$ e que $g(1) \times g(5) < 0$

(C) g seja contínua em $]1,5[$ e que $g(1) \times g(5) > 0$

(D) g seja contínua em $]1,5[$ e que $g(1) \times g(5) < 0$

3. Considere a sucessão (a_n), definida por $a_n = 3^{-n}$

De uma função f, contínua no seu domínio, sabe-se que $\lim f(a_n) = -\infty$

Qual das seguintes expressões pode definir a função f?

(A) $e^{\frac{1}{x}}$ **(B)** $\dfrac{\operatorname{sen} x}{e^{\frac{1}{x}}}$ **(C)** $\dfrac{\ln x}{\operatorname{sen} x}$ **(D)** $-\frac{1}{x} \times \ln x$

4. No referencial o.n. xOy junto está representado o gráfico da função f definida por

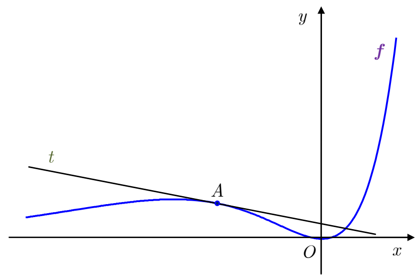
$f(x) = x^2 e^x$

e uma reta t com declive $-0{,}2$ e tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa A no intervalo $]-2,-1[$

Qual é, arredondada às centésimas, a abcissa de A?

(A) $-0{,}12$ **(B)** $-1{,}42$

(C) $-1{,}55$ **(D)** $-1{,}61$



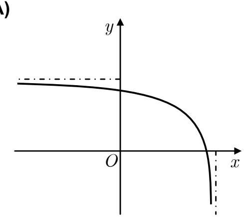
Adaptado do Caderno de Apoio, 12.º ano, Metas Curriculares

5. Seja g uma função derivável no seu domínio D. Sabe-se que:

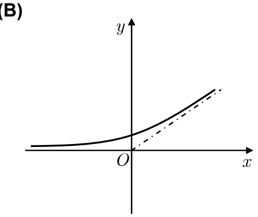
- o gráfico de g tem apenas duas assíntotas;
- $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in D$
- $g''(x) > 0 \Leftrightarrow x \in D$

Qual das opções seguintes pode representar parte do gráfico da função g?

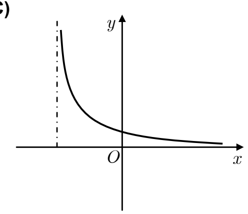
(A)



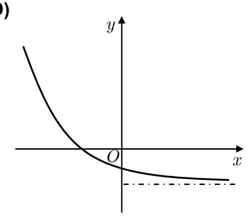
(B)



(C)



(D)



6. Sendo i a unidade imaginária em $\mathbb{C}$, qual é o termo que ocupa a posição central no desenvolvimento de $\left(\sqrt{2} - 2i\right)^{12}$?

(A) $-473\,088$ **(B)** $473\,088i$ **(C)** $236\,544$ **(D)** $-236\,544i$

7. Em $\mathbb{C}$, considere o número complexo $z = \ln 3 + i \ln 9$

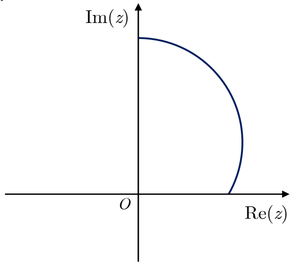
Sendo α um argumento de z, qual é o valor de $\operatorname{tg} \alpha$?

(A) $\ln 3$ **(B)** $\ln 9$ **(C)** 2 **(D)** 3

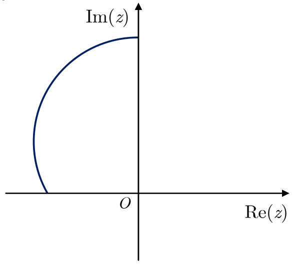
8. Considere, em $\mathbb{C}$, a condição $|z - i| = 2 \wedge \frac{\pi}{2} \leq \operatorname{Arg}(z) \leq \pi$

Em qual das opções seguintes pode estar, no plano complexo, o conjunto de pontos definidos por essa condição?

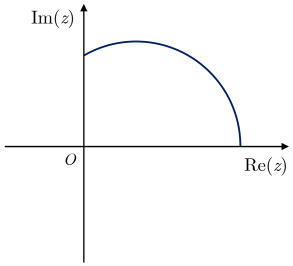
(A)



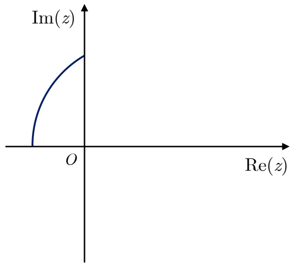
(B)



(C)



(D)

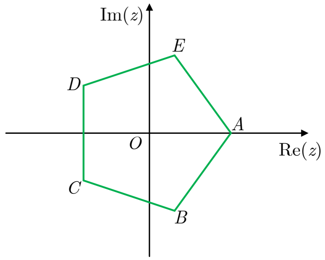


Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere, no plano complexo ao lado, o pentágono regular $[ABCDE]$ centrado na origem do referencial.



Considere também os números complexos $z_1 = 3$ e $z_2 = -2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}\,i$

Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.

1.1. Sabe-se que:

- o vértice A pertence ao semieixo positivo real e é a imagem geométrica de z_1
- o vértice B pertence ao quarto quadrante e é a imagem geométrica de um número w

Mostre que $\dfrac{-6\sqrt{2}\operatorname{cis}\left(\frac{21\pi}{10}\right)}{z_2 + 2\sqrt{6}} = w$

1.2. Determine, na forma trigonométrica, as raízes quartas de z_2

2. Em $\mathbb{C}$, considere os números complexos $w_1 = \sqrt[3]{10}\operatorname{cis}\left(\frac{5\pi}{18}\right)$ e $w_2 = i^{8n+5}\left(-50\sqrt{3} - 50\,i\right), n \in \mathbb{N}$

Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.

2.1. Mostre que w_1 é uma raiz de índice 6 de w_2

2.2. Dado o número complexo $w_3 = \operatorname{cis}(\alpha)$, determine os valores de $\alpha \in [0, 2\pi]$ de modo que $w_1 \times w_3$ seja um número imaginário puro.

3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+5}{\sqrt{x^2+7}} & \text{se } x \leq 3 \\[2ex] \dfrac{\ln(x-2) + \ln\left(\frac{3}{x}\right)}{x-3} & \text{se } x > 3 \end{cases}$$

Usando processos analíticos, resolva os itens seguintes.

3.1. Averigue se a função h é contínua em $x = 3$

3.2. O gráfico da função h tem uma assíntota horizontal quando x tende para $-\infty$

Determine a sua equação.

4. Considere a função, de domínio $]2,+\infty[$, definida por $f(x)=\log_3(x-2)$

4.1. Sem usar a calculadora, determine o conjunto solução da seguinte condição:

$f(x)-f(12-x)\leq 0$

4.2. No referencial o.n. xOy ao lado está representado parte do gráfico da função f e os pontos A e B

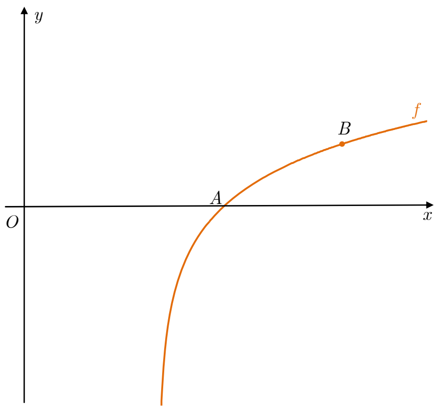
Tal como a figura sugere:

- o ponto A pertence ao gráfico de f e ao eixo Ox
- o ponto B pertence ao gráfico de f e a sua abcissa é superior à de A

Sabendo que $\overline{AB}=2$, determine a abcissa de B, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

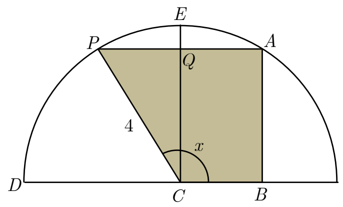
- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abcissa pedida com arredondamento às centésimas.



5. Relativamente à figura do lado, sabe-se que:

- a semicircunferência tem centro no ponto C e raio 4
- o ponto C pertence ao segmento de reta $[BD]$
- as retas AB e BD são perpendiculares.

Admita que um ponto P se desloca ao longo do arco DE, nunca coincidindo com D nem com E, e que os pontos A e B acompanham o movimento do ponto P de forma que o quadrilátero $[ABCP]$ seja um trapézio retângulo.



O ponto Q é a intersecção do segmento de reta $[CE]$ com o segmento de reta $[AP]$

Para cada posição do ponto P, seja x a amplitude do ângulo BCP e seja $g(x)$ a área do trapézio $[ABCP]$, $x\in\left]\frac{\pi}{2},\pi\right[$

5.1. Mostre que $g(x)=-12\operatorname{sen}(2x)$

5.2. Recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora, estude a função g quanto à monotonia e à existência de um extremo relativo, indicando:

- o intervalo onde g é crescente;
- o intervalo onde g é decrescente;
- o valor de x que maximiza a área do trapézio $[ABCP]$

6. **6.1.** Seja Ω, conjunto finito, o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos $(A\subset\Omega$ e $B\subset\Omega)$.

Sabendo que A e B são acontecimentos independentes, prove que:

$$P\left(A\cup\overline{B}\right)-P\left(\overline{B}\right)=P(A)\times P(B)$$

6.2. Lança-se, duas vezes, um dado cúbico, não viciado, numerado de 1 a 6.

Considere os seguintes acontecimentos:

A: «Só saem múltiplos de 3»

B: «Só saem números pares»

Qual é a probabilidade de saírem só múltiplos de 3 ou não saírem só números pares?

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em **6.1.** Neste caso, deverá justificar o uso da igualdade no contexto da situação apresentada.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 5	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	1.................30 1.1.........15 1.2.........15	2.................30 2.1.........15 2.2.........15	3.................30 3.1.........15 3.2.........15	4.................25 4.1.........10 4.2.........15	5.................25 5.1.........10 5.2.........15	6.................20 6.1.........10 6.2.........10

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:
αr (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r *– raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro × Apótema*

Área de sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r *– raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r *– raio da base*; g *– geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r *– raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ × *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Progressões

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho cis\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$