Escola Secundária de Francisco Franco (2015/2016)

www.esffranco.edu.pt

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

3.º Período 28/04/16 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Quantas palavras, com ou sem sentido, é possível escrever usando todas as letras da palavra ARTIMANHA?

(A) ${}^9C_3 \times 6!$ **(B)** ${}^9A_3 \times 6!$ **(C)** ${}^9C_7 \times 6!$ **(D)** $6! \times 3!$

2. Da discografia de David Bowie, há a destacar alguns álbuns que receberam discos de ouro.

Considere os seguintes acontecimentos:

R : «O álbum recebeu pelo menos um disco de ouro no Reino Unido»

E : «O álbum recebeu pelo menos um disco de ouro nos Estados Unidos»

Sabe-se que:

- $P(E) = \frac{8}{27}$
- $P(R) = \frac{5}{9}$
- $P\left(E \cap \bar{R}\right) = \frac{1}{9}$

Ao escolher um álbum qualquer de David Bowie que recebeu pelo menos um disco de ouro no Reino Unido, qual é a probabilidade de ele também ter recebido um disco de ouro nos Estados Unidos?

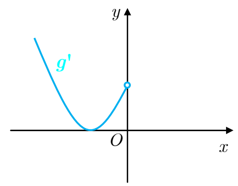
(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** $\frac{4}{9}$ **(D)** $\frac{8}{9}$

3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \frac{\cos x + 2\sqrt{x}}{\operatorname{sen} x + \sqrt{x}}$

Indique as equações das assíntotas do gráfico de f

(A) $x = \pi$ e $y = 2x$ **(B)** $x = 0$ e $y = 2x$ **(C)** $x = \pi$ e $y = 2$ **(D)** $x = 0$ e $y = 2$

4. No referencial xOy do lado, está parte do gráfico da função g', primeira derivada de uma função g, ambas de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0\}$



Sabendo que g' é uma função ímpar, pode-se concluir que:

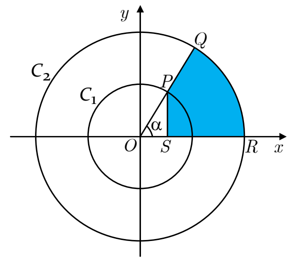
(A) g é decrescente em sentido lato em $\mathbb{R}^-$ e crescente em sentido lato em $\mathbb{R}^+$

(B) g é crescente em sentido lato em $\mathbb{R}^-$ e decrescente em sentido lato em $\mathbb{R}^+$

(C) g é crescente em sentido lato em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$

(D) g é decrescente em sentido lato em $\mathbb{R}^-$ e em $\mathbb{R}^+$

5. No referencial xOy da figura estão representadas as circunferências C_1 e C_2 de equações, respetivamente, $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + y^2 = 4$



Sabe-se que:

- O ponto P pertence ao primeiro quadrante e à circunferência C_1
- O ponto Q pertence à semirreta $\dot{O}P$ e à circunferência C_2
- O ponto R pertence ao semieixo positivo Ox e à circunferência C_2
- O ponto S pertence ao semieixo positivo Ox e tem a mesma abcissa que P

Seja α a amplitude do ângulo ROQ $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$

Qual das expressões seguintes dá o comprimento da zona a sombreado, em função de α?

(A) $\alpha + 2 + \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ **(B)** $\alpha + 2 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

(C) $2\alpha + 3 + \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha$ **(D)** $2\alpha + 3 + \operatorname{sen}\alpha - \cos\alpha$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Numa localidade, a temperatura do ar, em graus Celsius, foi dada, t minutos após as 4 horas, aproximadamente por

$$f(t) = \ln^2(t-2) - 2\ln(t-2) - 5 \text{ com } t \in [2{,}5;10]$$

1.1. Determine a variação da temperatura na localidade entre 4 horas e 7 minutos e as 4 horas e 10 minutos.

Apresente o resultado em graus Celsius, arredondado às décimas.

1.2. Determine o instante em que a temperatura foi mínima, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Apresente o resultado em horas, minutos e segundos (segundos arredondado às unidades).

2. Considere a função, de domínio $]-\infty, \pi[$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} xe^{x+\pi} - x & \text{se } x \leq -\pi \\ \operatorname{tg}\left(\frac{x-\pi}{4}\right) & \text{se } -\pi < x < \pi \end{cases}$$

2.1. Das afirmações seguintes, indique, justificando, as verdadeiras.

(i) A função g é contínua à esquerda de $-\pi$ e descontínua à direita de $-\pi$

(ii) A função g é contínua à direita de $-\pi$ e descontínua à esquerda de $-\pi$

(iii) A reta de equação $x = -\pi$ é uma assíntota do gráfico de g

2.2. Considere a função afim definida por $h(x) = x + 8$

Considere também, no domínio $[-10, -\pi]$, o triângulo $[ABC]$ em que:

- a abcissa do ponto A é o zero de h
- a abcissa do ponto B é o zero de g
- o ponto C é a interseção entre os gráficos de g e de h

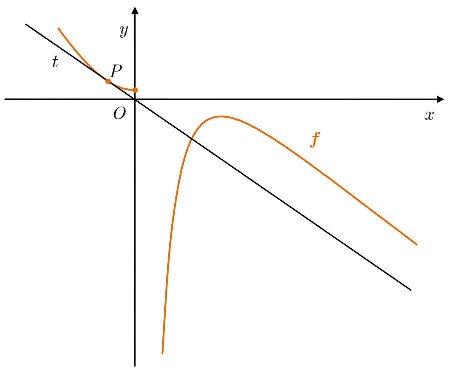
Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[ABC]$

Na sua resposta, deve:

- indicar a abcissa do ponto A
- indicar a abcissa do ponto B com arredondamento às centésimas;
- indicar as coordenadas do ponto C com arredondamento às centésimas;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- determinar a área do triângulo $[ABC]$ com arredondamento às décimas.

3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, cuja expressão e parte do seu gráfico estão a seguir representados.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\pi}{24} - \frac{\cos(2x)}{2} & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{\ln(x^2)}{x} - \frac{x}{2} & \text{se } x > 0 \end{cases}$$

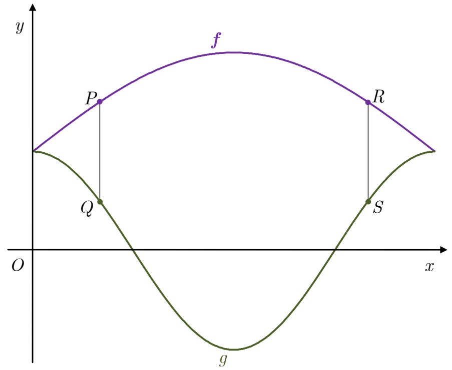


Sabe-se que:

- a reta t é tangente ao gráfico de f no ponto P e é assíntota do gráfico de f quando $x \to +\infty$
- a equação de t é da forma $y = mx$, com $m \neq 0$

Determine, sem usar a calculadora, a abcissa do ponto P, sabendo que ela pertence ao intervalo $\left]-\frac{\pi}{4}, 0\right[$

4. No referencial ao lado estão representados os gráficos das funções f e g definidas por $f(x) = \operatorname{sen} x + 1$ e $g(x) = \cos(2x)$ no intervalo $[0, \pi]$



4.1. Os pontos P e R, pertencentes ao gráfico de f, têm a mesma abcissa, respetivamente, que os pontos Q e S do gráfico de g e distam de uma unidade.

Determine as coordenadas de P e R

4.2. Determine o valor de $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{g(x)}{x - \frac{\pi}{4}}$

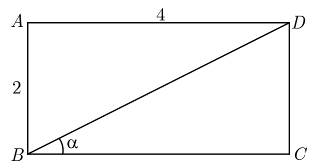
4.3. Seja h uma função cuja derivada h', de domínio $[0, 8\pi]$, é dada por $h'(x) = f\left(\frac{x}{4}\right)$

Estude o gráfico da função h quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, deve indicar o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função h tem concavidade voltada para cima, o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função h tem concavidade voltada para baixo e, caso existam, as abcissas dos pontos de inflexão do gráfico da função h

Adaptado do Caderno de Apoio, 11.º ano, Metas Curriculares

5. Na figura está representado o retângulo $[ABCD]$



Tal como sugere essa figura:

- $\overline{AB} = 2$
- $\overline{AD} = 4$
- $C\hat{B}D = \alpha$

Mostre que $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BD} = -8\sqrt{5}\,\operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (150 pontos)	1........................30 1.1.............10 1.2.............20	2........................30 2.1.............15 2.2.............15	3........................20	4........................55 4.1.............20 4.2.............15 4.3.............20	5........................15

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:
αr (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Área de um polígono regular: *Semiperímetro* × *Apótema*

Área de sector circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro*; r – *raio*)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – *raio da base*; g – *geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$ (r – *raio*)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* × *Altura*

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$

Progressões

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \, \cos b + \operatorname{sen} b \, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \, \cos b - \operatorname{sen} a \, \operatorname{sen} b$

$\operatorname{tg}(a+b) = \frac{\operatorname{tg} a + \operatorname{tg} a}{1 - \operatorname{tg} a \operatorname{tg} b}$

Complexos

$(\rho cis\theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis}\theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right) \quad (k \in \{0, \ldots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

O professor: Roberto Oliveira