



Escola Secundária de Francisco Franco (2015/2016)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

2.º Período 04/02/16 Duração: 90 minutos
Nome: N.º:
Classificação: O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, seleccione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

- 1. Nas últimas eleições presidenciais, houve 10 candidatos ao cargo de presidente da república. As televisões organizaram todos os possíveis debates envolvendo 2 candidatos. Ao escolher um desses debates ao acaso, qual é a probabilidade de nenhum dos dois candidatos mais votados (Marcelo Rebelo de Sousa e Sampaio da Nóvoa) ter participado nele?



- (A) 3/5 (B) 14/45 (C) 28/45 (D) 4/5

- 2. Considere, no triângulo de Pascal, todos os elementos x0, x1, x2, ..., xn de uma certa linha n. Qual é o valor de log8(x0 + x1 + x2 + ... + xn)?

- (A) n/3 (B) n/8 (C) 3 log8(n) (D) 8 log8(n)

- 3. Seja g a função, de domínio R, definida por g(x) = 10^5x

Qual das seguintes representa a expressão de g^-1, função inversa de g?

- (A) cube root of log x (B) log(cube root of x) (C) 5 ln x (D) 5 log x

- 4. Considere a função f, de domínio]3, +infinity[\ {4}, definida por f(x) = e^x / ln(x-3)

Considere também a sucessão de termo geral an = 3 + 2/sqrt(n)

Indique o valor de lim f(an)

- (A) 0 (B) e (C) 3 (D) +infinity

- 5. Seja a um número real superior a 8

Qual é o valor de lim (8^x - a^x) as x approaches infinity?

- (A) +infinity (B) 0 (C) a (D) -infinity

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

- 1. Para um programa que procura talentos para a música, foi feito um casting que consistia em entrevistar possíveis cantores durante 20 dias.

Assim, no primeiro dia apareceram 40 pessoas, no segundo dia apareceram 70 pessoas, no terceiro apareceram 100 pessoas e assim sucessivamente, ou seja, em cada dia apareceram mais 30 pessoas que no dia anterior.

Tendo em conta o número total de candidatos a cantores que apareceram nesses 20 dias, os responsáveis pretendem analisar os vários duetos possíveis.

- 1.1. Mostre que existem exatamente 21 121 750 maneiras distintas de se formarem grupos de dois cantores.

- 1.2. Sabe-se que 500 dos possíveis cantores têm grandes hipóteses de passar à fase seguinte.

Ao escolher quaisquer duas das pessoas que apareceram ao casting, qual é a probabilidade de ambas terem grandes hipóteses de passar à fase seguinte?

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondada às décimas.

- 2. Admita que o número de habitantes do concelho do Funchal, em milhares, t anos após o início de 1920, é dada, aproximadamente, por

f(t) = k / (1 + e^-0.04t) (k designa um número real positivo)

Resolva, usando exclusivamente métodos analíticos, os dois itens seguintes.

Nota: a calculadora pode ser utilizada em cálculos numéricos; sempre que, em cálculos intermédios, proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

- 2.1. Suponha que k = 120

Indique o ano e o mês em que, pela primeira vez desde o início da contagem, o número de habitantes no concelho do Funchal foi igual a 90 000

- 2.2. Admita agora que o valor de k é desconhecido.

Suponha que, de 1920 até 1970, houve um aumento de 45 mil habitantes no concelho.

Determine o valor de k, arredondado às décimas.

3. Considere a função, de domínio $]-\infty, 2]$, definida por $f(x) = \log_2(8 - 4x) + \log_4\left(\frac{1}{64}\right)$

Usando apenas processos analíticos, resolva os itens seguintes.

3.1. Mostre que $f(x) = \log_2(2 - x) - 1$

3.2. Determine o conjunto dos números reais que são soluções da condição $f(x) - 2\log_2(x) \geq -1$

4. Considere a função f , de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{e^{x+2} - 1} & \text{se } x < -2 \\ \frac{x-2}{x+3} & \text{se } x > -2 \end{cases}$$

Sem recorrer à calculadora, mostre que $\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = -4$

5. Considere a função, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, definida por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{12x^2 - 2x^3}{x^3 - 8x^2 + 13x - 6} & \text{se } x < 6 \\ \frac{1}{2} & \text{se } x = 6 \\ \frac{\sqrt{x-5} - 1}{x-6} & \text{se } x > 6 \end{cases}$$

Usando processos analíticos, resolva os itens seguintes.

5.1. Calcule $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x)$

5.2. Prove que g é contínua à direita de 6 e descontínua à esquerda de 6

6. Considere a função, de domínio \mathbb{R}^+ , definida por $h(x) = \frac{\log_a(x^2 + 3x)}{x^2}$, com $a > 1$

Usando processos analíticos, mostre que $\lim_{x \rightarrow +\infty} [h(x) + h(1)] = \log_a 4$

FIM

Formulário

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^{n+1}}{1-r}$

Probabilidades

$\mu = p_1x_1 + \dots + p_nx_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n(x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: 10		Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0			
Grupo II (150 pontos)	1.....30 1.1.....20 1.2.....10	2.....30 2.1.....15 2.2.....15	3.....30 3.1.....10 3.2.....20	4.....15	5.....30 5.1.....10 5.2.....20	6.....15