



www.esffranco.edu.pt

Escola Secundária de Francisco Franco (2015/2016)

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 5

1.º Período

10/12/15

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. “- Aritmeticamente, parecia uma obra de arte. Existem mais de três milhões de combinações possíveis para um número de telefone de sete algarismos. Só que não o escolheram ao acaso. Fizeram-no porque sabiam que estava desligado.”

AMANHÃ SERÁ OUTRO DIA, Lee Child

Considere um número de telefone com sete algarismos.

Dispondo de n algarismos todos diferentes (sendo o 0 e o 5 dois deles), quantos números de telefone distintos existem de modo que comecem pelo algarismo 5 e tenha apenas um algarismo 0?

- (A) $6n^5$ (B) $6(n-1)^5$ (C) $7n^5$ (D) $7(n-1)^5$

2. “Tempo médio de espera pelo próximo comboio, oito minutos.”

AMANHÃ SERÁ OUTRO DIA, Lee Child

Numa estação de comboios, o atraso de cada comboio segue uma distribuição aproximadamente normal de valor médio 8 minutos e desvio padrão 2 minutos.

Em cada 15 comboios, qual é a probabilidade, com três casas decimais, de exatamente 5 deles se atrasarem entre 8 e 12 minutos?

- (A) 0,072 (B) 0,095 (C) 0,104 (D) 0,113

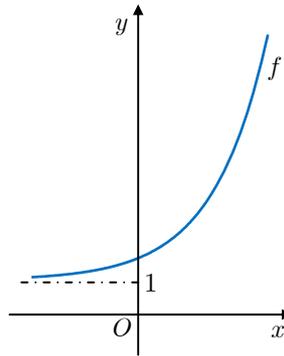
3. Dado um número natural n , sabe-se que uma certa variável aleatória X tem a seguinte distribuição de probabilidades:

x_i	${}^{2016}C_n$	${}^{2016}C_{n+1}$	${}^{2016}C_{n+2}$
$P(X = x_i)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Qual é o valor médio desta variável aleatória?

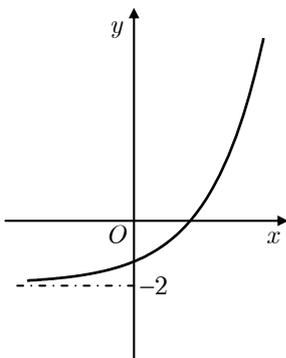
- (A) $\frac{{}^{2017}C_{n+2}}{4}$ (B) $\frac{{}^{2018}C_{n+2}}{4}$ (C) $\frac{{}^{2017}C_n}{4}$ (D) $\frac{{}^{2018}C_n}{4}$

4. Na figura a seguir está parte da representação gráfica de uma função real f

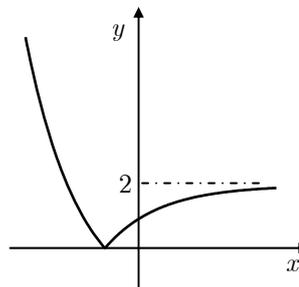


Em qual das figuras abaixo está a representação gráfica da função definida por $g(x) = |f(x) - 3|$?

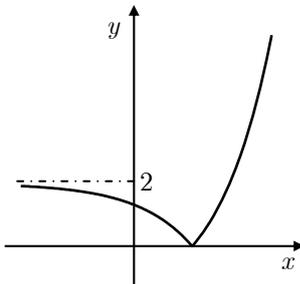
(A)



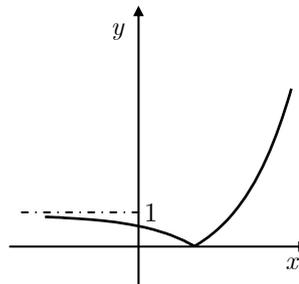
(B)



(C)



(D)



5. Considere a função real definida por $h(x) = 5^x - 25^{100}$

Qual é o único zero de h ?

(A) 100

(B) 200

(C) 300

(D) 400

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A World Cube Association (WCA) é a responsável pelos concursos oficiais envolvendo enigmas Rubik (inclusive a resolução do Cubo de Rubik).

1.1. Até novembro de 2015 e segundo um dos rankings elaborado pela WCA, sabe-se que, em relação às pessoas mais rápidas a resolver o cubo de Rubik:

- 27% deles são americanos;
- 16% deles resolveram o cubo de Rubik em menos de 6 segundos;
- de entre aqueles que resolveram o cubo de Rubik em menos de 6 segundos, 9% não são americanos.



Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa que resolveu o cubo de Rubik em 6 ou mais segundos.

Qual é a probabilidade de ela ser americana?

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondada às décimas.

1.2. Num certo evento, vão participar 3 jogadores americanos e n jogadores de outras nacionalidades ($n \in \mathbb{N}$).

Suponha que todos os $n + 3$ jogadores vão entrar na sala onde decorre o evento, um de cada vez.

Mostre que a probabilidade de os três americanos entrarem um a seguir ao outro é dada pela expressão

$$\frac{6}{n^2 + 5n + 6}$$

2. Do desenvolvimento de $\left(\frac{1}{x^2} - 2x\right)^{16}$ resulta um termo da forma kx^{-20}

Determine k

3. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto num cubo e numa pirâmide quadrangular regular.

A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice P pertence ao eixo Ox e o vértice R pertence ao eixo Oy

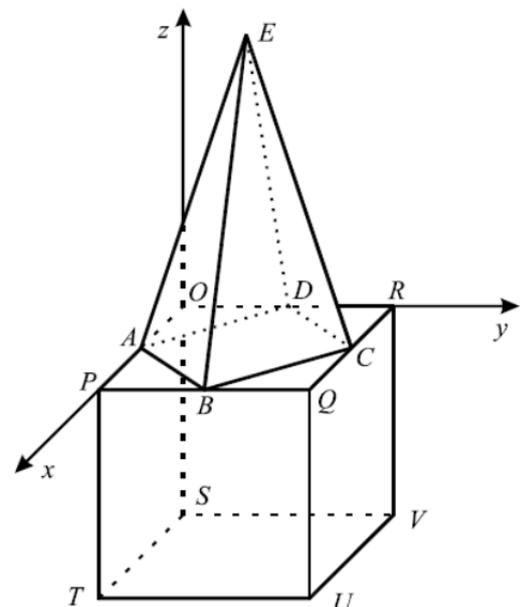
Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$

3.1. Escolhem-se, ao acaso, três arestas de apenas um dos prismas (cubo ou pirâmide).

Qual é a probabilidade de essas três arestas serem paralelas ao eixo Oz ?

3.2. Considere agora que são escolhidos, ao acaso, quatro vértices do sólido e seja X a variável que dá o número de vértices com cota não positiva (dos quatro escolhidos).

Construa a tabela de distribuição de probabilidades de X , apresentando as probabilidades na forma de fração irredutível.



(Adaptado do Teste Intermédio do 10.º ano, janeiro de 2009)

4. Considere a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = e^{2-x^2} - 1$

Usando métodos analíticos, determine, na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais:

4.1. O contradomínio de f

4.2. O conjunto solução da condição $f(x) > f(-\sqrt{2})$

5. É dada a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = 3^x - 4$

5.1. Sem usar a calculadora, determine a abscissa do ponto do gráfico de g de ordenada $\frac{1}{9\sqrt{3}} - 4$

5.2. No referencial o.n. xOy ao lado está representado parte do gráfico da função g e o trapézio retângulo $[ABCD]$

Tal como a figura sugere:

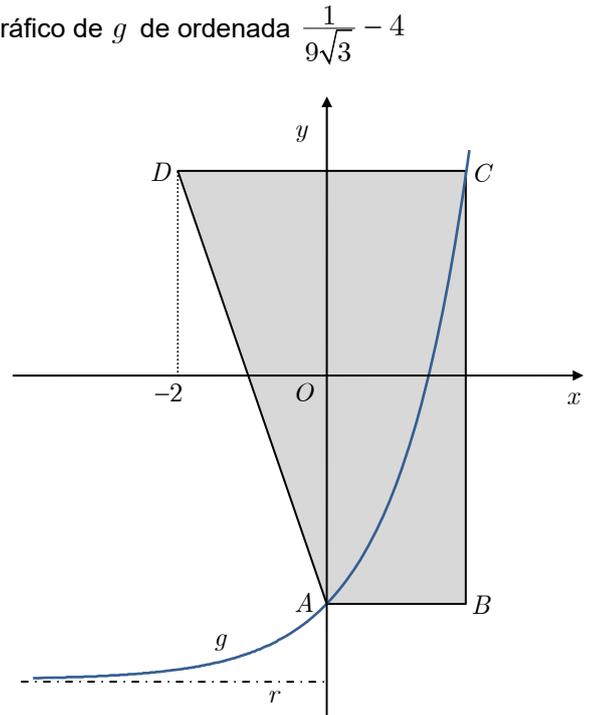
- o ponto A pertence ao gráfico de g e ao eixo Oy
- o ponto B tem a mesma ordenada que A
- o ponto C tem a mesma abscissa que B
- o ponto D tem abscissa -2 e a mesma ordenada que C
- A reta r é a assíntota do gráfico de g

Seja x a abscissa do ponto B

Sabendo que a área do trapézio $[ABCD]$ é igual a 22, determine x recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta, deve:

- equacionar o problema;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções visualizados, devidamente identificados;
- indicar a abscissa do ponto B com arredondamento às centésimas.



FIM

COTAÇÕES

Grupo I (50 pontos)	Cada resposta certa: 10	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0
------------------------	-------------------------	---

Grupo II (150 pontos)	1.....36	2.....18	3.....30	4.....36	5.....30
	1.1.....18		3.1.....12	4.1.....18	5.1.....12
	1.2.....18		3.2.....18	4.2.....18	5.2.....18

Formulário

$$\mu = x_1 p_1 + \dots + x_n p_n$$

$$\sigma = \sqrt{(x_1 - \mu)^2 p_1 + \dots + (x_n - \mu)^2 p_n}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$