



[www.esffranco.edu.pt](http://www.esffranco.edu.pt)

(2023/2024)

## 2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 8

1.º Período

05/12/2023

Duração: 90 minutos

Nome: \_\_\_\_\_

N.º: \_\_\_\_\_

Classificação:

O professor: \_\_\_\_\_

Na resposta aos itens de escolha múltipla, seleccione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Num saco, estão 64 bolas: 16 azuis, 16 roxas, 16 amarelas e 16 vermelhas.

Sabe-se as bolas de cada cor estão numeradas de 1 a 16.

- 1.1. Suponha que as bolas vão ser colocadas, ao acaso, em outros dois sacos, ambos diferentes, cada um com 32 bolas.

De quantas maneiras podem ficar todas as bolas azuis em apenas um saco?

(A)  $2 \times {}^{48}C_{16}$

(B)  $2 \times {}^{32}C_{16}$

(C)  ${}^{48}C_{16} + {}^{32}C_{16}$

(D)  ${}^{60}C_{16} + {}^{48}C_{16}$

- 1.2. Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, duas bolas do saco.

Sejam  $A_1$ ,  $R_2$  e  $N_2$  os acontecimentos:

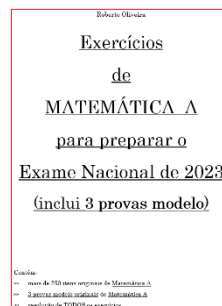
$A_1$ : «Sair bola azul na primeira extração.»;

$R_2$ : «Sair bola roxa na segunda extração.»;

$N_2$ : «Sair bola com número primo na segunda extração.».

Indique o valor de  $P((N_2 \cap R_2) | A_1)$ , na forma de fração irredutível, sem utilizar a fórmula da probabilidade condicionada.

Justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de  $P((N_2 \cap R_2) | A_1)$  no contexto da situação descrita.



2. Comunicaram à Nivéria que ela recebeu um telefonema de um familiar no estrangeiro mas não conseguiram precisar quem foi.

Ela sabe que tem 21 familiares na África do Sul e 14 na Venezuela, 7 mulheres e 7 homens.

Garantiram à Nivéria que a pessoa que telefonou era do sexo feminino.

Sabendo que a probabilidade de essa pessoa ser da Venezuela é  $\frac{7}{13}$ , determine a probabilidade de a pessoa que telefonou ser uma mulher se for da África do Sul.



3. 3.1. Seja  $\Omega$ , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória. Sejam  $A$  e  $B$  dois acontecimentos ( $A \subset \Omega$  e  $B \subset \Omega$ ).

Sabe-se que:

- $P(B) \neq 0$ ;
- $P(\bar{A} \cup B) = 5P(A \cap B)$ .

Mostre que  $P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) + P(B)[1 - 5P(A|B)]$ .

3.2. Foi feito um inquérito a um grupo de alunos de uma escola sobre a prática ou não de andebol e de basquetebol, tendo-se concluído que:

- 60% dos alunos praticam andebol;
- 20% dos alunos praticam apenas basquetebol;
- 50% dos alunos praticam basquetebol ou não praticam andebol.

Escolhe-se, ao acaso, um dos alunos, praticante de basquetebol.

Determine a probabilidade de ele também praticar andebol.

Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

**Nota:** Se o desejar, utilize a igualdade referida em 3.1.. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos  $A$  e  $B$ , no contexto da situação apresentada.

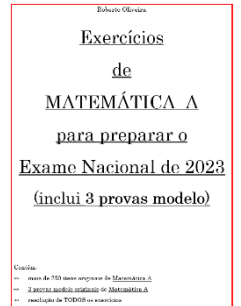


4. Considere a função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R}$ , definida por  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 12} & \text{se } x \leq 2 \\ 11 - 5x & \\ 4 + 2x - x^3 & \text{se } x > 2 \\ kx^2 - 4k & \end{cases}$ , sendo  $k$  um número real não nulo.

Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva as alíneas seguintes.

- 4.1. Sabendo que  $f$  é uma função contínua, determine o valor de  $k$ .
- 4.2. Quando  $x \rightarrow -\infty$ , o gráfico de  $f$  admite uma assíntota paralela ao eixo  $Ox$ . Escreva uma equação dessa assíntota.
- 4.3. Considere a sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = n^2 - 1000$ . Qual pode ser o valor de  $\lim_{n \rightarrow \infty} f(u_n)$ ?

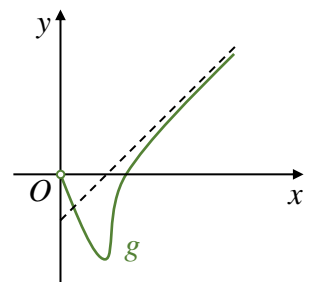
- (A)  $-4$                       (B)  $0$                       (C)  $\frac{1}{2}$                       (D)  $+\infty$



5. Na figura ao lado, está o gráfico da função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^+$ , juntamente com a sua única assíntota, de equação  $y = x - 2$ .

Qual é o valor de  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{g(x)}{x} \times (g(x) - x) \right]$ ?

- (A)  $+\infty$                       (B)  $0$   
 (C)  $2$                           (D)  $-2$



6. Seja  $h$  a função, de domínio  $[-2, 1]$ , definida por  $h(x) = -2x^3 - 4x^2 + 1$ .

6.1. Considere a equação  $h(x) = -2$ .

6.1.1. Recorra ao teorema de Bolzano-Cauchy para provar que a equação anterior é possível no intervalo  $] -2, 1[$ .

6.1.2. Sabe-se que existe uma só solução da equação anterior.

Utilizando a calculadora gráfica, determine a distância entre os pontos  $A$  e  $O$ , onde:

- $A$  é o ponto cuja abcissa é solução da equação anterior;
- $O$  é a origem de um referencial.

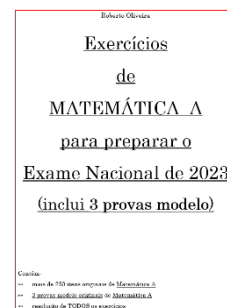
Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a abcissa de  $A$  com arredondamento às centésimas;
- apresente a distância pedida arredondada às décimas.

6.2. Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), estude a função  $h$  quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função  $h$  é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função  $h$  é decrescente;
- os valores de  $x$  para os quais a função  $h$  tem extremos relativos, caso existam.



7. Um ponto  $P$  move-se numa reta de tal forma que, em cada instante  $t$  (em segundos), a distância  $d$  (em cm) à origem do referencial é dada pela expressão  $d(t) = t^3 + 2t^2 - kt + 40$ , sendo  $k$  um número real diferente de 0.

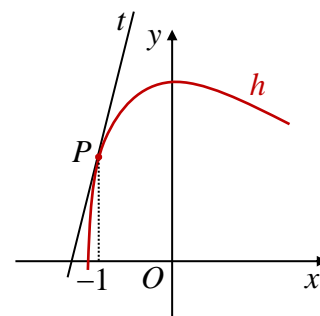
Sabendo que a velocidade de  $P$  no instante  $t = 3$  é 21 centímetros por segundo, qual é o valor de  $k$  ?

- (A) 19                                      (B) 18                                      (C) 20,5                                      (D) 21,5

8. No referencial  $xOy$  da figura, está parte do gráfico da função  $h$ , diferenciável em  $\mathbb{R}$ , e a reta  $t$ , tangente ao gráfico de  $h$  no ponto  $P$ , de abcissa  $-1$ .

Sabendo que  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{h(x) - h(-1)}{x^2 - 1} = -2$ , qual é o valor do declive da reta  $t$  ?

- (A) 2    (B) 4  
(C)  $\frac{7}{4}$     (D)  $\frac{15}{4}$

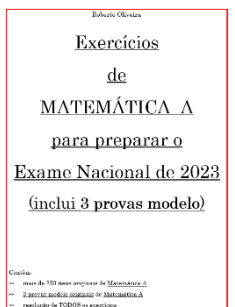


9. Sejam  $f$  e  $g$  duas funções, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , tais que:
- a reta de equação  $y = 5x - 4$  é uma assíntota ao gráfico de  $f$ ;
  - $g(x) = \frac{\sin(2x) - f(x)}{2x + \sqrt{x}}$ .

O gráfico de  $g$  tem uma assíntota de equação  $y = b$ .

Determine  $b$ .

FIM



### COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	1.2.	2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.1.	6.1.2.	6.3.	7.	8.	9.	200
8	16	16	16	16	16	16	8	8	16	16	16	8	8	16	

## Formulário

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

PASSATEMPO: Conhecês os teus colegas? No último teste, a média da turma foi 11,8. Se acertares na média deste teste, podes ganhar até 8 pontos: se a tua média estiver correta, ganhas 8 pontos, se falhares por 0,1, ganhas 6, se falhares por 0,2, ganhas 5, se falhares por 0,3 ou 0,4, ganhas 4, se falhares por 0,5 ou 0,6, ganhas 3, se falhares por 0,7 ou 0,8, ganhas 2 e se falhares por 0,9 ou 1, ganhas 1 ponto.

Indica a média da turma (com 2 c.d.) que pensas ser: