# Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

**Proposta de Teste [novembro - 2017]**

**Nome:** ______________________________________________

**Ano / Turma:** __________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

## CADERNO 1
## (É permitido o uso de calculadora gráfica)

**1.** No intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$ a equação $\cos x = k$ tem três soluções:

O valor de $k$ pode ser:

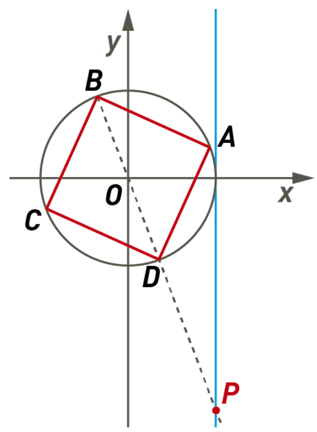
**(A)** $0,85$ **(B)** $-0,86$

**(C)** $0,87$ **(D)** $0,86$

**2.** A equação $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+2\sin\left(\pi+x\right)=\frac{1}{3}$ tem duas soluções no intervalo $]-\pi, 0[$.

Determina valores arredondados às milésimas dessas soluções.

**3.** Na figura está representada a circunferência trigonométrica e nela inscrito o quadrado $[ABCD]$.




Sabe-se que a reta $BD$ interseta a reta de equação $x=1$ no ponto $P$ de ordenada $-2,7$.

A abcissa do ponto $B$, arredondada às centésimas, é:

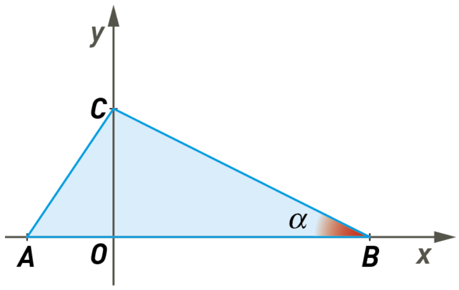
**(A)** $-0,35$ **(B)** $-0,94$

**(C)** $0,35$ **(D)** $-0,28$

**4.** No referencial o.n. $xOy$ está representado um triângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- os vértices $A$ e $B$ pertencem a $Ox$ e o vértice $C$ pertence a $Oy$;
- o ponto $A$ tem coordenadas $(-2,0)$;
- $C\hat{B}A=\alpha$
- a reta $BC$ é definida pela equação $y=-\frac{x}{2}+3$.




**4.1.** Determina o valor de $\tan(\alpha)$.

**4.2.** Mostra que o valor do produto escalar $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}$ é 48.

**FIM (Caderno 1)**

| Cotações | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões - Caderno 1** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.1.** | **4.2.** | |
| **Pontos** | 15 | 18 | 15 | 12 | 20 | **80** |

## CADERNO 2
## (Não é permitido o uso de calculadora)

**5.** Considera a função *f*, de domínio $[0,\ 2\pi]$, definida por $f(x)=\sin(2x)+\sin x$.

**5.1.** Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que a medida do lado de um quadrado é igual a $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$. Então, a medida da área desse quadrado é:

**(A)** $\frac{1}{4}$ **(B)** 3 **(C)** $\frac{27}{4}$ **(D)** $\frac{3}{4}$

**5.2.** Determina os zeros da função *f*.

**6.** Das seguintes afirmações indica a falsa.

**(A)** $\forall x\in \left]-\pi,\ -\frac{\pi}{2}\right[,\ \sin x.\cos x>0$

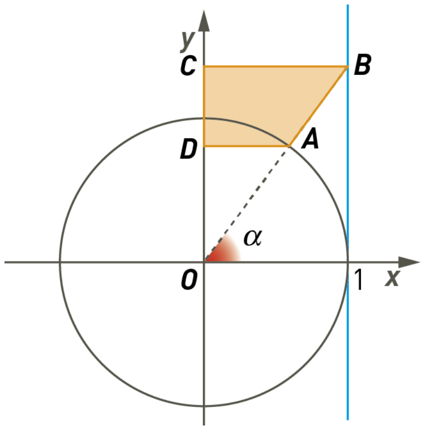
**(B)** $\exists x\in \left]0,\ \frac{\pi}{3}\right[: \cos(2x)<0$

**(C)** $\exists x\in \left]0,\ \frac{\pi}{3}\right[: \sin(2x)<0$

**(D)** $\forall x\in \left]\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right[,\ \cos(-x)>0$

**7.** Na figura está representado, num referencial o.n. $xOy$, a circunferência trigonométrica.
O ponto *A* pertence à circunferência e $\alpha$ é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado que tem por lado origem o semieixo positivo $Ox$ e lado extremidade a semirreta $\dot{O}A$ $\left(\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[\right)$.

A semirreta $\dot{O}A$ interseta a reta $x=1$ no ponto *B*.
O quadrilátero [*ABCD*] é um trapézio retângulo em que os vértices *C* e *D* pertencem a $Oy$.



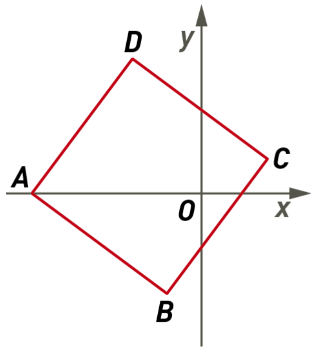

**7.1.** Para uma posição do ponto *A*, tem-se $\overline{BC}-\overline{AD}=\frac{1}{2}$.

Determina o valor de $\alpha$ para essa posição de *A*.

**7.2.** Sabe-se que $\overline{OD}=\frac{3}{4}$, para uma posição do ponto *A*. Mostra, nesse caso, que $\overline{OC}=\frac{3\sqrt{7}}{7}$.

**7.3.** Mostra que a área do trapézio, em função de $\alpha$, é dada por $\frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$.

**8.** Na figura, em referencial o.n. $xOy$, está representado um quadrado $[ABCD]$ de lado igual a 5.




Sabe-se que:

- a reta $BC$ é definida pela equação $y=\dfrac{4x-5}{3}$;
- o ponto $A$ tem coordenadas $(-5,0)$.

**8.1.** Determina, na forma reduzida, uma equação da reta $AD$.

**8.2.** O valor exato de $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD}$ é:

**(A)** $\dfrac{3}{5}$ **(B)** 5 **(C)** 15 **(D)** 9

## FIM (Caderno 2)

| Cotações | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Caderno 1 (com calculadora) | | | | | | | | | |
| **Questões** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.1.** | **4.2.** | | | | | |
| **Pontos** | 15 | 18 | 15 | 12 | 20 | | | | **Total** | **80** |
| | Caderno 2 (sem calculadora) | | | | | | | | | |
| **Questões** | **5.1.** | **5.2.** | **6.** | **7.1.** | **7.2.** | **7.3.** | **8.1** | **8.2** | | |
| **Pontos** | 15 | 20 | 15 | 10 | 15 | 15 | 15 | 15 | **Total** | **120** |
| **Total** | | | | | | | | | | **200** |

# FORMULÁRIO

## GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência:** $\alpha r$
($\alpha$ – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

**Áreas de figuras planas**

**Polígono regular:** *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

**Setor circular:** $\frac{\alpha r^2}{2}$

($\alpha$ *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

**Áreas de superfícies**

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(*r – raio*)

**Volumes**

**Pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

**Cone:** $\frac{1}{3} \times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

**Esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ (*r – raio*)

## PROGRESSÕES

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

## TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

## COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se $X$ é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

## CADERNO 1
## (É permitido o uso de calculadora gráfica)

**1.** No intervalo $\left[-\frac{\pi}{6}, 2\pi\right]$ a equação $\cos x = k$ tem três soluções se $k > \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)$.

Com $\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ e $\frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0,8660254$, conclui-se que o valor de $k$ deve ser 0,87.

**Resposta:** A opção correta é a **(C)** **0,87** .

**2.**

$$\cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + 2\sin(\pi + x) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x - 2\sin x = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin x = -\frac{1}{3}$$

No intervalo $]-\pi, 0[$ uma das soluções é $\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$ e a outra é $-\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right)$.

Recorrendo à calculadora tem-se:

$$\arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \approx -0,340 \quad \text{e} \quad -\pi - \arcsin\left(-\frac{1}{3}\right) \approx -2,802$$

**Resposta:** –0,340 e –2,802

**3.** A amplitude do ângulo orientado, em radianos, com lado origem o semieixo positivo $Ox$ e lado extremidade a semirreta $\dot{O}B$ é igual a $\arctan(-2,7) + \pi$.

A abcissa do ponto $B$ é igual a $\cos(\arctan(-2,7) + \pi)$.

Recorrendo à calculadora, tem-se:

$\cos(\arctan(-2,7) + \pi) \approx -0,35$

**Resposta:** A opção correta é a **(A)** **–0,35** .

**4.**

**4.1.** A inclinação da reta $BC$ é $\pi - \alpha$ e o declive da reta $BC$ é $-\frac{1}{2}$.

Então, $\tan(\pi - \alpha) = -\frac{1}{2}$. Daqui resulta que $\tan(-\alpha) = -\frac{1}{2}$, ou seja, $\tan\alpha = \frac{1}{2}$.

**Resposta:** $\frac{1}{2}$

**4.2.** A reta $BC$ é definida pela equação $y=-\frac{x}{2}+3$.

Se $x=0$, tem-se $y=3$. Daqui resulta que $C(0,3)$.

Se $y=0$, tem-se $x=6$. Daqui resulta que $B(6,0)$.

$\overrightarrow{BA}=B-A=(8,0)$ e $\overrightarrow{BC}=C-B=(-6,3)$

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos\alpha$ **(1)**

Sabe-se que $\tan\alpha=\frac{1}{2}$ e que $1+\tan^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$. Daqui resulta que $\cos^2\alpha=\frac{4}{5}$.

Como $\alpha$ é um ângulo agudo, tem-se $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

Substituindo em **(1)** $\left\|\overrightarrow{BA}\right\|=8$; $\left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{36+9}=\sqrt{45}=3\sqrt{5}$ e $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$, tem-se:

$\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\left\|\overrightarrow{BA}\right\|\left\|\overrightarrow{BC}\right\|\cos\alpha=8\times3\sqrt{5}\times\frac{2\sqrt{5}}{5}=48$

**Resposta:** $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=48$

## FIM (Caderno 1)

| Cotações | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões - Caderno 1** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.1.** | **4.2.** | |
| **Pontos** | 15 | 18 | 15 | 12 | 20 | **80** |

## CADERNO 2
## (Não é permitido o uso de calculadora)

**5.**

**5.1.** $f(x)=\sin(2x)+\sin x$

$f\left(\frac{\pi}{3}\right)=\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)+\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3}=\sqrt{3}$

A medida do lado do quadrado $\sqrt{3}$, conclui-se que a área é 3.

**Resposta:** A opção correta é a **(B)** $\mathbf{3}$.

**5.2.** Zeros da função *f*.

$f(x)=0 \Leftrightarrow \sin(2x)+\sin x=0 \Leftrightarrow \sin(2x)=-\sin x$

$\Leftrightarrow \sin(2x)=\sin(-x) \Leftrightarrow 2x=-x+2k\pi \ \vee\ 2x=\pi+x+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

$3x=2k\pi \ \vee\ x=\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow x=\frac{2k\pi}{3} \ \vee\ x=\pi+2k\pi\ ,\ k\in\mathbb{Z}$

As soluções pertencentes ao intervalo $[0, 2\pi]$ são: $0\,;\ \frac{2\pi}{3}\,;\ \frac{4\pi}{3}\,;\ \pi$ e $2\pi$.

**Resposta:** Os zeros de *f* são: $0\,;\ \frac{2\pi}{3}\,;\ \frac{4\pi}{3}\,;\ \pi$ e $2\pi$.

**6.** $\exists x\in \left]0,\frac{\pi}{3}\right[ : \sin(2x)<0$

Se $x\in \left]0,\frac{\pi}{3}\right[$, então $0<2x<\frac{2\pi}{3}$. O seno é positivo no 1.º e 2.º quadrantes.

Assim, tem-se: $\forall x\in \left]0,\frac{\pi}{3}\right[,\ \sin(2x)>0$

A opção falsa é a (C).

**Resposta:** A opção falsa é **(C)** $\exists x\in \left]0,\frac{\pi}{3}\right[ : \sin(2x)<0$

**7.**

**7.1.** $\overline{BC}-\overline{AD}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1-\cos\alpha=\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\alpha=\frac{1}{2}$

Como $\alpha$ é um ângulo agudo conclui-se que $\alpha=\frac{\pi}{3}$.

**7.2.** $\overline{OD}=\sin\alpha=\frac{3}{4}$; $\overline{OC}=\tan\alpha$

Como $\cos^2 x+\sin^2 x=1$ e $\sin\alpha=\frac{3}{4}$, resulta que $\cos\alpha=\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{7}}{4}} = \frac{3}{\sqrt{7}} = \frac{3\sqrt{7}}{7}$$

Conclui-se que $\overline{OC} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$.

**Resposta:** $\overline{OC} = \dfrac{3\sqrt{7}}{7}$

**7.3.** Área do trapézio: $\dfrac{\overline{BC}+\overline{AD}}{2}\times\overline{CD} = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}\times(\tan\alpha-\sin\alpha) = \dfrac{1+\cos\alpha}{2}\times\dfrac{\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha} =$

$$= \frac{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{(1-\cos^2\alpha)\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin^2\alpha\sin\alpha}{2\cos\alpha} = \frac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$$

**Resposta:** A área do trapézio é dada por $\dfrac{\sin^3\alpha}{2\cos\alpha}$.

**8.**

**8.1.** Retas paralelas têm o mesmo declive. A reta *AD* é do tipo $y = \dfrac{4}{3}x + b$ e passa no ponto $A(-5,0)$.

$0 = -\dfrac{20}{3} + b$, ou seja, $b = \dfrac{20}{3}$.

Equação, na forma reduzida, da reta *AD*: $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{20}{3}$

**Resposta:** $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{20}{3}$

**8.2.** Seja $\theta$ a amplitude do ângulo formado pelos vetores $\overrightarrow{AO}$ e $\overrightarrow{AD}$.

Como $\theta$ é a inclinação da reta *AD*, tem-se que $\tan\theta = \dfrac{4}{3}$.

Mas, $1+\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta}$, então $\dfrac{1}{\cos^2\theta} = \dfrac{25}{9}$. Daqui resulta que $\cos\theta = \dfrac{3}{5}$.

Assim, tem-se $\overrightarrow{AO}.\overrightarrow{AD} = \|\overrightarrow{AO}\|\|\overrightarrow{AD}\|\cos\theta = 5\times5\times\dfrac{3}{5} = 15$.

**Resposta:** A opção correta é a **(C)** **15** .

## FIM (Caderno 2)

| Cotações | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | Caderno 1 (com calculadora) | | | | | | | | | |
| Questões | 1. | 2. | 3. | 4.1. | 4.2. | | | | | |
| Pontos | 15 | 18 | 15 | 12 | 20 | | | | Total | 80 |
| | Caderno 2 (sem calculadora) | | | | | | | | | |
| Questões | 5.1. | 5.2. | 6. | 7.1. | 7.2. | 7.3. | 8.1. | 8.2. | | |
| Pontos | 15 | 20 | 15 | 10 | 15 | 15 | 15 | 15 | Total | 120 |
| Total | | | | | | | | | | 200 |