Teste de Matemática A

2019 / 2020

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

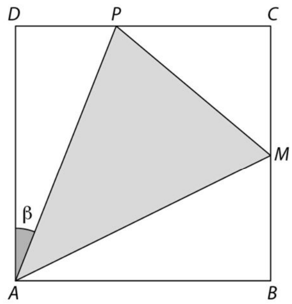
(A) $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[,\ \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \operatorname{sen} \alpha_1 > \operatorname{sen} \alpha_2$

(B) $\forall\, \alpha_1, \alpha_2 \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[,\ \alpha_1 < \alpha_2 \Rightarrow \cos \alpha_1 < \cos \alpha_2$

(C) $\exists\, \alpha \in \left]\pi, \frac{3\pi}{2}\right[: \operatorname{tg} \alpha = 2020$

(D) $\exists\, \alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[: \operatorname{sen} \alpha = -\frac{1}{2020} \ \wedge\ \cos \alpha = \frac{2019}{2020}$

2. Na figura está representado um quadrado $[ABCD]$, de lado 2.



O ponto M é o ponto médio de $[BC]$.

O ponto P desloca-se sobre o lado $[CD]$ e, para cada posição do ponto P, considere β a amplitude do ângulo PAD $\left(\beta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]\right)$.

2.1. Mostre que a área do triângulo $[AMP]$ é dada, em função de β, por:

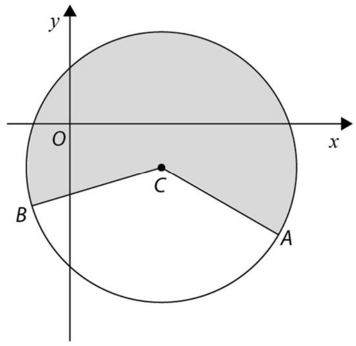
$$A(\beta) = 2 - \operatorname{tg} \beta$$

2.2. Considere agora as funções reais de variável real f e g definidas por:

$$f(x) = 2 - \operatorname{tg} x \quad \text{e} \quad g(x) = 2\operatorname{sen} x \operatorname{tg} x + 2$$

Determine, recorrendo a processos exclusivamente analíticos, as abcissas dos pontos de interseção dos gráficos das funções f e g.

3. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, a circunferência de centro C que pode ser definida por:



$$(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10$$

Sabe-se que A e B são dois pontos da circunferência e que a área da região sombreada é $\frac{20\pi}{3}$.

3.1. Qual é o valor do produto escalar $\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB}$?

(A) $-50\sqrt{3}$ **(B)** -5 **(C)** $5\sqrt{3}$ **(D)** 5

3.2. Considere também o ponto D, ponto de interseção da circunferência com o semieixo positivo das abcissas.

Determine a equação reduzida da reta t, reta tangente à circunferência no ponto D.

4. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, um prisma triangular reto.

Sabe-se que uma das bases do prisma está contida no plano α de equação $-x+\frac{5}{2}y+z-\frac{47}{2}=0$ e que a outra base está contida no plano β que contém o ponto A de coordenadas $(1, 2, 3)$.

4.1. Em qual das opções se encontra uma condição que define o plano β?

(A) $2x-5y-2z+14=0$

(B) $5x-2y+2z-7=0$

(C) $-x+\frac{5}{2}y+z+7=0$

(D) $4x-10y-4z+14=0$

4.2. Determine o valor exato da altura do prisma.

4.3. Considere os pontos B, C e D, dos quais se sabe que:

- o ponto B pertence ao plano α e tem abcissa e ordenada igual a 1;
- o ponto C pertence ao plano α e ao eixo das ordenadas;
- o ponto D pertence ao plano de equação $y=1$ e tem cota igual ao cubo da abcissa;
- os vetores $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são perpendiculares.

Determine a abcissa do ponto D, recorrendo à calculadora gráfica.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora e que lhe permite(m) resolver a equação, devidamente identificado(s);
- apresente a abcissa do ponto D, arredondada às milésimas.

5. Para um determinado valor real a, considere a sucessão (u_n) definida por:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \dfrac{1-u_n}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Qual é o terceiro termo desta sucessão?

(A) $\frac{1-a}{2}$

(B) $\frac{1+a}{2}$

(C) $\frac{1+a}{4}$

(D) $\frac{1-a}{4}$

6. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = \frac{2n+5}{n+1}$.

6.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

6.2. Prove que a sucessão (u_n) é limitada.

6.3. Considere a progressão aritmética (v_n), da qual se sabe que os dois primeiros termos são iguais aos dois primeiros termos da sucessão (u_n).
Calcule a soma dos 20 primeiros termos de (v_n).

7. De dois vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$, sabe-se que:

- $\|\vec{u}\| = 3$
- $\|\vec{v}\| = 5$
- $\text{sen}\,\alpha = \frac{4\sqrt{14}}{15}$, onde α é o ângulo agudo formado pelos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$.

Qual é o valor de $\|\vec{u} + \vec{v}\|$?

(A) $\frac{1}{15}$ **(B)** 6 **(C)** 15 **(D)** 36

- FIM -

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	
8	20	20	8	20	8	20	20	8	20	20	20	8	**200**

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

1. Opção (C)

Na opção (A) não se encontra uma proposição verdadeira, pois, no 1.º quadrante, a função seno não é decrescente.

Na opção (B) não se encontra uma proposição verdadeira, pois, no 2.º quadrante, a função cosseno não é crescente.

Na opção (C) encontra-se uma proposição verdadeira, já que, no 3.º quadrante, $\text{tg}\,\alpha > 0$ e existe α tal que $\text{tg}\alpha = 2020$.

Na opção (D) não se encontra uma proposição verdadeira, pois não existe um valor de α tal que $\text{sen}\alpha = -\frac{1}{2020}$ e $\cos\alpha = \frac{2019}{2020}$, já que não verifica a fórmula fundamental da trigonometria:

$$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = \left(-\frac{1}{2020}\right)^2 + \left(\frac{2019}{2020}\right)^2 \neq 1$$

2.

2.1. $A_{[AMP]} = A_{[ABCD]} - A_{[ABM]} - A_{[APD]} - A_{[MPC]} =$

$$= 2^2 - \frac{\overline{AB}\times\overline{BM}}{2} - \frac{\overline{PD}\times\overline{AD}}{2} - \frac{\overline{CP}\times\overline{MC}}{2} =$$

$$= 4 - \frac{2\times 1}{2} - \frac{2\text{tg}\,\beta\times 2}{2} - \frac{(2-2\text{tg}\,\beta)\times 1}{2} =$$

$$= 4 - 1 - 2\text{tg}\,\beta - 1 + \text{tg}\,\beta =$$

$$= 2 - \text{tg}\beta \qquad \text{c.q.d.}$$

Cálculo auxiliar

$\text{tg}\,\beta = \frac{\overline{PD}}{2} \Leftrightarrow \overline{PD} = 2\text{tg}\beta$

$\overline{CP} = 2 - \overline{PD} = 2 - 2\text{tg}\beta$

2.2. Pretende-se os valores de $x \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = g(x)$:

$$2 - \text{tg}x = 2\text{sen}x\,\text{tg}x + 2 \Leftrightarrow 2\text{sen}x\,\text{tg}x + \text{tg}x = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}x(2\text{sen}x + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \text{tg}x = 0 \quad \vee \quad 2\text{sen}x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \vee \quad \text{sen}x = -\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow x = k\pi \quad \vee \quad x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

3.

3.1. Opção (B)

Seja α o ângulo côncavo formado pelos vetores $\overrightarrow{CA}$ e $\overrightarrow{CB}$.

Como sabemos que a área da região sombreada é $\frac{20\pi}{3}$, então:

$$\frac{A_{\text{círculo}}}{2\pi} = \frac{\frac{20\pi}{3}}{\alpha} \Leftrightarrow \frac{\pi\times\left(\sqrt{10}\right)^2}{2\pi} = \frac{\frac{20\pi}{3}}{\alpha} \Leftrightarrow 5\alpha = \frac{20\pi}{3} \Leftrightarrow \alpha = \frac{4\pi}{3}$$

Assim:

$\overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \times \cos(2\pi - \alpha) =$

$= \sqrt{10} \times \sqrt{10} \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) =$

$= 10 \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -5$

3.2. $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 10 \quad \wedge \quad y = 0 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (0+1)^2 = 10 \quad \wedge \quad y = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 = 9 \quad \wedge \quad y = 0$

$\Leftrightarrow (x - 2 = 3 \quad \vee \quad x - 2 = -3) \wedge \quad y = 0$

$\Leftrightarrow (x = 5 \quad \vee \quad x = -1) \quad \wedge \quad y = 0$

Os pontos de interseção da circunferência com o eixo das abcissas têm coordenadas (5, 0) e $(-1, 0)$.

Sendo que D tem abcissa positiva, então $D(5, 0)$.

$\overrightarrow{DC} = C - D = (2, -1) - (5, 0) = (-3, -1)$

$m_{DC} = \frac{1}{3}$

Como t é perpendicular a DC, vem que $m_t = -3$.

Logo, a equação reduzida da reta t é da forma $y = -3x + b, b \in \mathbb{R}$. Como $D(5, 0) \in t$, vem que:

$0 = -3 \times 5 + b \Leftrightarrow b = 15$

A equação reduzida da reta t é, então, $y = -3x + 15$.

4.

4.1. Opção (A)

Como β é o plano que contém a outra base do prisma, então β é paralelo a α e contém o ponto A.

Assim, um vetor normal a β pode ser o vetor de coordenadas $\left(-1, \frac{5}{2}, 1\right)$ e uma equação que define o plano β é da forma $-x + \frac{5}{2}y + z + d = 0, d \in \mathbb{R}$. Como $A \in \beta$, vem que:

$-1 + \frac{5}{2} \times 2 + 3 + d = 0 \Leftrightarrow d = -7$

O plano β pode, então, ser definido pela condição $-x + \frac{5}{2}y + z - 7 = 0$ ou, de forma equivalente, $2x - 5y - 2z + 14 = 0$.

4.2. Seja I o ponto de interseção entre o plano α e a reta perpendicular a α e que passa pelo ponto A.

A altura do prisma é, então, a distância entre os pontos A e I.

Equação vetorial da reta AI: $(x, y, z) = (1, 2, 3) + k\left(-1, \frac{5}{2}, 1\right), k \in \mathbb{R}$

Ponto genérico: $\left(1-k, 2+\frac{5}{2}k, 3+k\right), k \in \mathbb{R}$

Para que o ponto pertença ao plano α, terá que verificar:

$$-(1-k)+\frac{5}{2}\left(2+\frac{5}{2}k\right)+(3+k)-\frac{47}{2}=0 \Leftrightarrow -1+k+5+\frac{25}{4}k+3+k-\frac{47}{2}=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{33}{4}k=\frac{33}{2}$$

$$\Leftrightarrow k=2$$

Assim, o ponto I (ponto de interseção de α com a reta AI) tem coordenadas $\left(1-2, 2+\frac{5}{2}\times 2, 3+2\right)=(-1,7,5)$.

A altura do prisma é:

$$d(A,I)=\sqrt{(-1-1)^2+(7-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+25+4}=\sqrt{33}$$

4.3.

- $B(1,1,z)$

  $-1+\frac{5}{2}\times 1+z-\frac{47}{2}=0 \Leftrightarrow z=22$

  $B(1,1,22)$

- $C(0,y,0)$

  $-0+\frac{5}{2}y+0-\frac{47}{2}=0 \Leftrightarrow y=\frac{47}{5}$

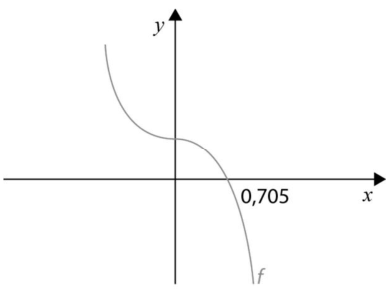
  $C\left(0,\frac{47}{5},0\right)$

- $D(x,1,x^3), x \in \mathbb{R}$

Como $\overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{OD}$ são perpendiculares, tem-se que:

$\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{OD}=0 \Leftrightarrow \left(-1,\frac{42}{5},-22\right)\cdot(x,1,x^3)=0 \Leftrightarrow -x+\frac{42}{5}-22x^3=0$

Determinemos o zero da função f definida por $f(x)=-x+\frac{42}{5}-22x^3$, utilizando a calculadora gráfica:



A abcissa do ponto D é aproximadamente 0,705.

5. Opção (C)

$u_1 = a$

$u_2 = \frac{1 - u_1}{2} = \frac{1 - a}{2}$

$u_3 = \frac{1 - u_2}{2} = \frac{1 - \left(\frac{1-a}{2}\right)}{2} = \frac{\frac{2}{2} - \frac{1}{2} + \frac{a}{2}}{2} = \frac{1 + a}{4}$

6.

6.1. $u_{n+1} - u_n = \frac{2(n+1)+5}{(n+1)+1} - \frac{2n+5}{n+1} = \frac{2n+2+5}{n+2} - \frac{2n+5}{n+1} =$

$= \frac{(2n+7)(n+1)-(n+2)(2n+5)}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{2n^2+2n+7n+7-2n^2-5n-4n-10}{(n+2)(n+1)} =$

$= \frac{-3}{(n+2)(n+1)} < 0, \forall n \in \mathbb{N}$

A sucessão (u_n) é monótona decrescente.

6.2. $u_n = \frac{2n+5}{n+1} = 2 + \frac{3}{n+1}$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 2n+5 & n+1 \\ \cline{2-2} -2n-2 & 2 \\ \hline 3 & \end{array}$$

$n \geq 1, \forall n \in \mathbb{N}$

Logo:

$n + 1 \geq 2$

$\frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}$

$\frac{3}{n+1} \leq \frac{3}{2}$

$2 + \frac{3}{n+1} \leq \frac{7}{2}$

Por outro lado, também sabemos que, $\frac{3}{n+1} > 0, \forall n \in \mathbb{N}$.

Logo, $2 + \frac{3}{n+1} > 2$.

Assim, $2 < u_n \leq \frac{7}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$, isto é, (u_n) é uma sucessão limitada.

(Note-se que podia igualmente ter sido provado que a sucessão (u_n) é limitada, mostrando que $0 < u_n < 5,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Observe-se que, por um lado, $u_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ e, por outro lado, tem-se que $\frac{3}{n+1} < 3$ e, logo, $u_n = 2 + \frac{3}{n+1} < 5, \forall n \in \mathbb{N}$.)

6.3. $v_1 = u_1 = \frac{2+5}{1+1} = \frac{7}{2}$

$v_2 = u_2 = \frac{2\times 2+5}{2+1} = \frac{9}{3} = 3$

Seja S_{20} a soma dos 20 primeiros termos de (v_n):

$S_{20} = \frac{v_1+v_{20}}{2} \times 20 =$

$= \frac{\frac{7}{2}+(-6)}{2} \times 20 =$

$= -25$

Cálculos auxiliares

$r = v_2 - v_1 = 3 - \frac{7}{2} = -\frac{1}{2}$

$v_{20} = v_1 + 19 \times r =$

$= \frac{7}{2} + 19 \times \left(-\frac{1}{2}\right) =$

$= -6$

7. Opção (B)

Sabe-se que $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$.

Logo:

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \vec{u}\,.\vec{u} + 2\vec{u}\,.\vec{v} + \vec{v}.\vec{v}$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2 \times \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\alpha + \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 3^2 + 2 \times 3 \times 5 \times \cos\alpha + 5^2$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 9 + 30 \times \frac{1}{15} + 25$

$\Leftrightarrow \|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = 36$

Assim, $\|\vec{u}+\vec{v}\| = 6$.

Cálculo auxiliar

$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{4\sqrt{14}}{15}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = 1 - \frac{224}{225}$

$\Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{1}{225}$

Como α é agudo, $\cos\alpha = \frac{1}{15}$.