Novo Espaço – Matemática A 12.º ano

Proposta de Teste [outubro - 2017]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Numa tômbola há cinquenta bolas numeradas de 1 a 50.
Num sorteio são retiradas sucessivamente, sem reposição, cinco bolas formando uma sequência de cinco números.

1.1. Quantas sequências diferentes há com pelo menos um múltiplo de 5?

1.2. Qual é o número de sequências, tendo, no máximo, dois números de um só algarismo?

2. Na montra de uma perfumaria vão ser expostos, lado a lado, oito frascos de perfume, sendo três deles iguais entre si e os restantes todos diferentes.

Quantas sequências se podem formar, atendendo ao tipo de frasco?

Indica a opção correta.

(A) 6720 **(B)** 720 **(C)** 120 **(D)** $40\,320$

3. De uma linha do Triângulo de Pascal composta por ${}^{n}C_{p}$, com $p \in \{0, 1, \ldots, n\}$, sabe-se que:

- *n* é ímpar;
- o maior número observado é 1716;
- a soma de todos os elementos dessa linha menores que 1716 é igual 4760.

Determina o número de termos dessa linha.

Porto Editora

4. O sistema de matrículas de automóveis, num dado país, é constituído por uma sequência de cinco algarismos seguida de uma sequência de três letras, tal como é sugerido na figura.
Considera o alfabeto com 26 letras.

4.1. Determina o número de matrículas diferentes sem algarismos repetidos e com exatamente uma e uma só vogal.

4.2. Quantas são as matrículas que satisfazem as seguintes condições:

- tem exatamente dois zeros, sendo os restantes algarismos diferentes;
- a soma dos algarismos é um número par;
- as três letras são vogais diferentes.

4.3. Um computador gera, de forma aleatória, uma matrícula do sistema.

Qual é a probabilidade de obter uma matrícula em que a sequência de algarismos represente um número maior que 30 000 e que seja uma capicua?

Apresenta o resultado em percentagem.

Nota: Um número diz-se capicua quando se lê de igual forma da esquerda para a direita e da direita para a esquerda.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões - Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	
Pontos	15	15	8	15	12	15	15	**95**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

1. Considera os conjuntos:

$A = \{x \in \mathbb{Z} : \ |x-1| \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : \ 7 - 3x \geq -8\}$

Qual dos seguintes números representa $\#\,(B \backslash A)$?

Indica a opção correta.

(A) 1 **(B)** 2 **(C)** 35 **(D)** 4

2. Dado um conjunto *A*, sabe-se que $\#A = n$, com $n \in \mathbb{N}_0$.
Qual dos seguintes números pode ser igual a $\#(A \times A \times A)$?

(A) 15 **(B)** 27 **(C)** 9 **(D)** 21

3. Sejam *A* e *B* dois acontecimentos associados à mesma experiência aleatória.

Determina $P(A)$ sabendo que:

- $P(B \cap \overline{A}) = 0{,}45$
- $P(A \cup B) = 0{,}8$
- $P(\overline{A \cap B}) = 0{,}7$

4. Numa certa linha do Triângulo de Pascal, o penúltimo elemento é a quarta parte do terceiro. Qual é a soma de todos os elementos dessa linha?

Indica a opção correta.

(A) 512 **(B)** 32 **(C)** 1024 **(D)** 10

5. No desenvolvimento da expressão $\left(\frac{1}{x^2} - x\right)^{12}$, pelo Binómio de Newton, há um termo independente de x. Esse termo pode ser representado na forma ${}^{n}C_k$.

Determina os valores de n e de k.

6. Num saco foram colocadas 12 bolas, indistinguíveis ao tato, numeradas de 1 a 12.

As bolas com número ímpar são azuis e as bolas com número par são vermelhas.

6.1. Ao acaso, retira-se uma bola do saco e verifica-se a cor e o número.

Seja *A* e *B* os acontecimentos:

A: “a bola retirada tem número múltiplo de 3”

B: “a bola retirada é azul”

Determina o valor de $P\left(A\middle|\overline{B}\right)$, sem aplicar a fórmula de probabilidade condicionada.

Na resposta deves indicar:

- o significado de $P\left(A\middle|\overline{B}\right)$;
- os casos possíveis;
- os casos favoráveis;
- o resultado na forma de fração irredutível.

6.2. Retomando o saco com as 12 bolas, ao acaso, extraem-se sucessivamente duas bolas, sem reposição, observando-se o número e a cor de cada uma delas.

Sejam *C* e *D* os acontecimentos:

C: “a primeira bola extraída é vermelha”

D: “a soma dos números das duas bolas retiradas é par”

Determina $P(C \cap D)$. Apresenta o resultado na forma de fração irredutível.

7. Considera um prisma reto com n arestas laterais, com $n \geq 5$, tendo sido identificado cada vértice por uma letra.

7.1. Do conjunto dos vértices do prisma foram escolhidos dois ao acaso. A probabilidade de os vértices escolhidos definirem uma reta que contenha uma aresta do prisma é dada por:

(A) $\frac{3n}{{}^{n}A_2}$ **(B)** $\frac{n}{{}^{n}C_2}$ **(C)** $\frac{3n}{{}^{2n}C_2}$ **(D)** $\frac{3n}{{}^{n}A_2}$

7.2. Do conjunto dos vértices do prisma vão ser escolhidos três. Quantas escolhas diferentes podem ser feitas de modo que os três vértices não pertençam todos à mesma base do prisma?

A seguir são apresentadas duas respostas corretas:

Resposta A: ${}^{2n}C_3 - 2 \times {}^{n}C_3$

Resposta B: $2n \times {}^{n}C_2$

Numa composição matemática explica o raciocínio associado a cada resposta, explicitando com clareza o siginificado, no contexto, de ${}^{2n}C_3$ e de $2 \times {}^{n}C_3$, na resposta *A* e de $2n \times {}^{n}C_2$, na resposta *B*.

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**				
Pontos	15	15	8	15	12	15	15	**Total**			**95**
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**		
Pontos	8	8	15	8	12	15	15	8	16	**Total**	**105**
Total											**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr

(α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)*

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$

(α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$

(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$

(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Cone: $\frac{1}{3} \times \text{Área da base} \times \text{Altura}$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ *(r – raio)*

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.

1.1. De 1 a 50 há dez números que são múltiplos de 5:

$\{5\,,10\,,15\,,20\,,25\,,30\,,35\,,40\,,45\,,50\}$

O número total de sequências de 5 elementos sem qualquer restrição é dado por:
${}^{50}A_5\ = 254\,251\,200$

O número total de sequências de 5 elementos sem qualquer múltiplo de 5 é dado por:
${}^{40}A_5\ = 78960960$

Assim, o número de sequências com pelo menos um múltiplo de 5 é dado por:
$254\,251\,200 - 78\,960\,960 = 175\,290\,240$

Resposta: Há 175 290 240 sequências diferentes com pelo menos um múltiplo de 5.

1.2. Ter no máximo dois números de um só algarismo, significa não ter números de um só algarismo, ou ter exatamente um ou ter exatamente dois.

De 1 a 50 há nove números de um só algarismo e os restantes 41 têm mais de um algarismo.

Assim, tem-se:

$${}^{41}A_5\ +\ {}^{9}C_1 \times {}^{41}C_4 \times 5!\ +\ {}^{9}C_2 \times {}^{41}C_3 \times 5! =$$

$$= 8\,9927\,760 + 2\,624\,918\,400 + 276\,307\,200 = 2\,991\,153\,360$$

Resposta: Há 2 991 153 360 sequências diferentes, no máximo, com dois números de um algarismo.

2. Se os frascos fossem todos diferentes o número de sequências era dado por 8!.

Como há três frascos iguais o número de sequências é dado por:

$$\frac{8!}{3!} = \frac{3! \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8}{3!} = 6720$$

Resposta: Opção correta **(A) 6720**

3. De uma linha do Triângulo de Pascal composta por ${}^{n}C_{p}$, com $p \in \{0, 1, \dots, n\}$, sabe-se que:

- *n* é ímpar;
- o maior número observado é 1716;
- a soma de todos os elementos dessa linha menores que 1716 é igual 4760.

Sendo n ímpar o número de elementos é par, sendo os dois elementos centrais os maiores e iguais a 1716.

A soma de todos os elementos dessa linha é igual a: $4760 + 2 \times 1716$, ou seja, 8192.

Mas, sabe-se que a soma de todos os elementos da linha é dada por 2^n.

Assim, tem-se: $2^n = 8192$.

Como $8192 = 2^{13}$, resulta que $n = 13$.

Conclui-se que a linha é constituída por 14 elementos.

Resposta: O número de elementos dessa linha é 14.

4.

4.1. Para a sequência de números há ${}^{10}A_5 = 30\,240$ possibilidades.

Para as sequências de letras, o número de possibilidades é dado por:

$${}^{5}C_1 \times 3 \times {}^{21}A'_2 = 15 \times 21^2 = 6615$$

No total há ${}^{10}A_5 \times 6615 = 30\,240 \times 6615 = 200\,037\,600$ possibilidades.

Resposta: Há 200 037 600 matrículas diferentes nas condições indicadas.

4.2. Quantas são as matrículas que satisfazem as seguintes condições:

- tem exatamente dois zeros, sendo os restantes algarismos diferentes;
- a soma dos algarismos é um número par;
- as três letras são vogais diferentes.

Número de posições diferentes que os dois zeros podem ocupar na sequência de 5 elementos: ${}^{5}C_2 = 10$

Número de sequências de três vogais diferentes: ${}^{5}A_3 = 60$

Se a soma dos cinco elementos é um número par significa que os outros três elementos da sequência podem ser três números pares ou dois números ímpar e um par:

Assim, o número pedido é dado por: ${}^{10}C_2 \times \left({}^{4}A_3 + {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1 \times 3! \right) \times {}^{5}A_3$

$${}^{10}C_2 \times \left({}^{4}A_3 + {}^{4}C_2 \times {}^{5}C_1 \times 3! \right) \times {}^{5}A_3 = 10 \times (24 + 6 \times 5 \times 6) \times 60 = 10 \times 204 \times 60 = 122\,400$$

Resposta: Há 122 400 matrículas nas condições indicadas.

4.3. Para o número ser maior que 30 000 e capicua, o algarismo das dezenas de milhar tem sete possibilidades (ou 3, ou 4, ou 5, ou 6, ou 7, ou 8, ou 9), o algarismo das unidades tem uma possibilidade que é ser igual ao das dezenas de milhar. O algarismo dos milhares pode ser qualquer algarismo, tem 10 possibilidades e o das dezenas tem uma possibilidade. O algarismo das centenas tem 10 possibilidades

$$\underline{7} \times \underline{10} \times \underline{10} \times \underline{1} \times \underline{1}$$

Número de casos favoráveis: $7 \times 10^2 = 700$

Número de casos possíveis: ${}^{10}A'_5 = 10^5 = 10\,000$

Aplicando a Lei de Laplace a probabilidade pedida é dada por $\frac{700}{10\,000} = 0{,}07$, ou seja, 7%.

Resposta: A probabilidade pedida é 7%.

FIM (Caderno 1)

Cotações								Total
Questões - Caderno 1	**1.1.**	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**4.3.**	
Pontos	15	15	8	15	12	15	15	**95**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

1. $A = \{x \in \mathbb{Z} : \ |x-1| \leq 3\}$ e $B = \{x \in \mathbb{N} : \ 7 - 3x \geq -8\}$

$|x-1| \leq 3 \Leftrightarrow x - 1 \leq 3 \wedge x - 1 \geq -3 \Leftrightarrow x \leq 4 \wedge x \geq -2$

$A = \{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4\}$

$7 - 3x \geq -8 \Leftrightarrow -3x \geq -15 \Leftrightarrow x \leq 5$

$B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$B \backslash A = \{x : \ x \in B \wedge x \notin A\} = \{5\}$

$\#(B \backslash A) = 1$

Resposta: Opção correta **(A) 1**

2. $\#(A \times A \times A) = n \times n \times n = n^3$
A resposta é um cubo perfeito.
Das opções apresentadas o único cubo perfeito é 27.

Resposta: Opção correta **(B) 27**

3. $P(A \cap B) = 1 - P(\overline{A \cap B}) = 1 - 0{,}7 = 0{,}3$

$P(B \cap \bar{A}) = P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45$

Sendo $P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45$

Sabe-se que: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}8$; $P(B) - P(A \cap B) = 0{,}45$

Então, $P(A) + 0{,}45 = 0{,}8$, ou seja, $P(A) = 0{,}35$.

Resposta: $P(A) = 0{,}35$

4. $^nC_{n-1} = \frac{^nC_2}{4} \Leftrightarrow {^nC_1} = \frac{^nC_2}{4} \Leftrightarrow n = \frac{n!}{2!(n-2)! \times 4} \Leftrightarrow n = \frac{n(n-1)}{8}$

$$\Leftrightarrow 8n = n^2 - n \Leftrightarrow n^2 - 9n = 0 \Leftrightarrow n = 0 \vee n = 9$$

No contexto, a solução é $n = 9$. A soma de todos os elementos dessa linha do Triângulo de Pascal é $2^9 = 512$.

Resposta: A opção correta é **(A) 512**.

5.

$\left(\frac{1}{x^2}-x\right)^{12}=\sum_{k=0}^{12}\left({}^{12}C_k\times(x^{-2})^{12-k}\times(-x)^k\right)=\sum_{k=0}^{12}\left({}^{12}C_k\times x^{-24+3k}\times(-1)^k\right)$

O termo independente de x resulta quando $-24+3k=0$, ou seja, $k=8$.

Se $k=8$, o termo independente de x é igual a ${}^{12}C_8$.

Resposta: $n=12$ e $k=8$.

6.

6.1. Pretende-se determinar a probabilidade de sair uma bola com número múltiplo de 3, sabendo que o resultado é uma bola não azul, ou seja vermelha.

$A=\{A3\,,\ V6\,,A9\,,V12\}$; $B=\{A1\,,A3\,,A5\,,A7\,,A9\,,A11\}$

Assim, os casos possíveis são: $\overline{B}=\{V2\,,V4\,,V6\,,V8\,,V10\,,V12\}$

$\#\overline{B}=6$
Os casos favoráveis são: $A=\{A3\,,\ V6\,,\ A9\,,\ V12\}$

$\#A=4$

Aplicando a Lei de Laplace, tem-se: $P(A|\overline{B})=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$

Resposta: $P(A|\overline{B})=\frac{2}{3}$

6.2. Sabe-se que: $P(D|C)=\frac{P(D\cap C)}{P(C)}$

Daqui resulta que $P(D\cap C)=P(D|C)\times P(C)$.

Se a primeira bola extraída é vermelha, ou seja, com número par, então a segunda extração terá de ser vermelha para que a soma dos números das bolas extraídas seja número par.

Assim, tem-se $P(D|C)=\frac{5}{11}$ e $P(C)=\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$

Então, $P(D\cap C)=P(D|C)\times P(C)=\frac{5}{11}\times\frac{1}{2}=\frac{5}{22}$.

Resposta: $P(D\cap C)=\frac{5}{22}$

7.

7.1. O número de arestas do prisma é dado por: $3n$
O número de vértice do prisma é dado por: $2n$
Número de casos favoráveis é dado por: $3n$
Número de casos possíveis é dado por: ${}^{2n}C_2$
A probabilidade pedida é dada por: $\frac{3n}{{}^{2n}C_2}$

Resposta: A opção correta é **(C)** $\frac{3n}{{}^{2n}C_2}$.

7.2. Resposta A: ${}^{2n}C_3 - 2 \times {}^{n}C_3$ e **Resposta B:** $2n \times {}^{n}C_2$

A resposta A corresponde ao seguinte raciocício.

Começa-se por representar o número total de escolhas de três vértices que é representado por ${}^{2n}C_3$.

De seguida, determina-se o número total de escolhas dos três vértices pertencentes a uma das bases do prisma que é dado por: ${}^{n}C_3$

Como o prisma tem duas bases, o número total de escolhas em que os três vértices pertencem à mesma base é dado por $2 \times {}^{n}C_3$.

Assim, o número total de maneiras de escolher os três vértices de modo que não pertençam todos à mesma base do prisma é dado por ${}^{2n}C_3 - 2 \times {}^{n}C_3$.

A resposta B corresponde ao seguinte raciocínio:

Escolhe um vértice de uma base e os outros dois da outra base.

Assim, tem-se: ${}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 + {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2$

Como, ${}^{n}C_1 = n$, resulta que ${}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 + {}^{n}C_1 \times {}^{n}C_2 = n \times {}^{n}C_2 + n \times {}^{n}C_2 = 2n \times {}^{n}C_2$.

Assim, o número total de maneiras de escolher os três vértices de modo que não pertençam todos à mesma base do prisma é dado por $2n \times {}^{n}C_2$.

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	1.1.	1.2.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.				
Pontos	15	15	8	15	12	15	15			Total	95
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	1.	2.	3.	4.	5.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.		
Pontos	8	8	15	8	12	15	15	8	16	Total	105
Total											200