Teste de Matemática A

2022 / 2023

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

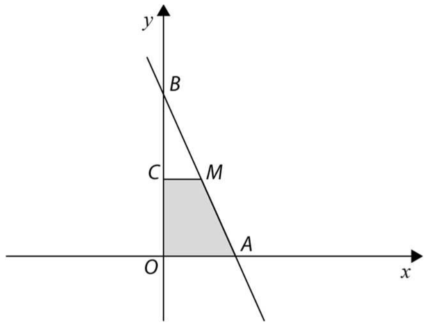
Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Na figura ao lado estão representados, num referencial o.n. Oxy, a reta AB e o trapézio $[OAMC]$.



Sabe-se que:

- a reta AB tem equação $y = -4x + 8$;
- M é o ponto médio do segmento de reta $[AB]$.

Qual das seguintes expressões define o conjunto de pontos da região a sombreado?

(A) $y \leq -4x + 8 \ \wedge \ y \leq 2 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$

(B) $y \leq -4x + 8 \ \wedge \ y \leq 4 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$

(C) $y \geq -4x + 8 \ \wedge \ x \leq 2 \ \wedge \ x \geq 0 \ \wedge \ y \geq 0$

(D) $y \geq -4x + 8 \ \vee \ x \leq 4 \ \vee \ x \geq 0 \ \vee \ y \geq 0$

2. Para qualquer valor real positivo x, tem-se que $\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1}$ é igual a:

(A) x **(B)** $\frac{1}{x}$ **(C)** $\sqrt{x}$ **(D)** $\sqrt{x} - 1$

3. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy:

- a circunferência de centro C definida por $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 20 = 0$;
- os pontos B e D (pontos de interseção da circunferência com o eixo das ordenadas, sendo o ponto B o de menor ordenada).

3.1. Mostre que as coordenadas do centro da circunferência são $(2, 5)$ e que o seu raio é 3.

3.2. Averigue se o triângulo $[BCD]$ é equilátero.

3.3. Escreva a equação reduzida da mediatriz do segmento de reta $[BC]$.
Apresente o declive e a ordenada na origem com o denominador racionalizado.

4. Para quaisquer valores reais positivos a, b e c, qual das seguintes expressões é equivalente a $a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{2}{3}}\, c^{-\frac{5}{6}}$?

(A) $\sqrt[3]{a^3 b^2 c^5}$ **(B)** $\sqrt[3]{\frac{a^2 b^3}{c^6}}$ **(C)** $\sqrt[6]{a^3 b^2 c^5}$ **(D)** $\sqrt[6]{\frac{a^3 b^4}{c^5}}$

5. Considere, num plano munido de um referencial o.n. Oxy, os pontos $A(1,2)$ e $B(-3,-2)$.

5.1. Determine as coordenadas do vetor $\vec{u}$, colinear com $\overrightarrow{AB}$, de sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$ e de norma igual a $\sqrt{11}$. Apresente os valores das coordenadas sob a forma de fração com o denominador racionalizado.

5.2. Seja $\mathcal{C}$ a circunferência de centro em A e que passa na origem do referencial.

5.2.1. Defina por uma condição o conjunto de pontos do quarto quadrante que pertencem ao interior do círculo definido pela circunferência $\mathcal{C}$.

5.2.2. Determine as coordenadas dos pontos de interseção da reta AB com a circunferência $\mathcal{C}$.

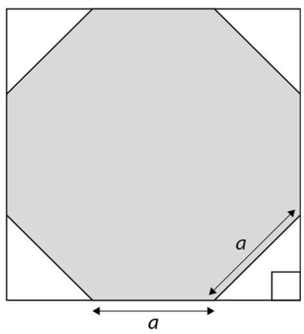
5.3. Considere o ponto P de coordenadas $(k, k-6)$, $k \in \mathbb{R}$.
Para que valor de k se tem o ponto P equidistante de A e de B?

(A) $-\frac{5}{2}$ **(B)** $\frac{5}{2}$ **(C)** $-\frac{1}{2}$ **(D)** $\frac{1}{2}$

6. Sejam a, b e c números reais, dos quais se sabe que $a+b+c=\sqrt[4]{25}$ e que $a+b-c=\sqrt{5}$. Assim, $a^2+2ab+b^2-c^2$ é igual a:

(A) 5 **(B)** $\sqrt{5}$ **(C)** $5\sqrt{5}$ **(D)** $\sqrt[4]{5}$

7. Uma criança cortou quatro cantos iguais (em forma de triângulos retângulos isósceles) de uma cartolina quadrada e obteve um octógono regular de lado a, como se indica na figura.
Prove que a área do octógono em função de a pode ser dada por $2a^2(1+\sqrt{2})$.



FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.1.**	**5.2.2.**	**5.3.**	**6.**	**7.**	
10	10	20	20	25	10	20	20	20	10	10	25	**200**

Teste N.º 1 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

Como os pontos *A* e *B* são os pontos de interseção da reta *AB* com os eixos coordenados, e a reta *AB* tem equação $y = -4x + 8$, então:

$A(x, 0)\colon 0 = -4x + 8 \Leftrightarrow x = 2$

Logo, $A(2, 0)$.

$B(0, 8)$, pois 8 é a ordenada na origem da reta *AB*.

Como *M* é o ponto médio de [*AB*], então as coordenadas de *M* são $\left(\frac{2+0}{2}. \frac{0+8}{2}\right) = (1, 4)$.

Assim, a região a sombreado pode ser definida pela condição:

$$y \leq -4x + 8 \wedge y \leq 4 \wedge x \geq 0 \wedge y \geq 0$$

2. Opção (C)

$$\frac{\sqrt{x}+x}{\sqrt{x}+1} = \frac{(\sqrt{x}+x)(\sqrt{x}-1)}{(\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-1)} = \frac{(\sqrt{x})^2 - \sqrt{x} + x\sqrt{x} - x}{(\sqrt{x})^2 - 1^2} =$$

$$= \frac{x - \sqrt{x} + x\sqrt{x} - x}{x-1} =$$

$$= \frac{\sqrt{x}(-1+x)}{x-1} =$$

$$= \sqrt{x}$$

3.

3.1. $x^2 - 4x + y^2 - 10y + 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 2^2 + y^2 - 10y + 5^2 = -20 + 2^2 + 5^2$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 9$$

C(2, 5) e raio = $\sqrt{9} = 3$

3.2. Quando $x = 0$:

$(0-2)^2 + (y-5)^2 = 9 \Leftrightarrow 4 + (y-5)^2 = 9$

$\Leftrightarrow (y-5)^2 = 5$

$\Leftrightarrow y - 5 = \pm\sqrt{5}$

$\Leftrightarrow y = 5 + \sqrt{5} \ \vee \ y = 5 - \sqrt{5}$

Assim, *B*(0, $5 - \sqrt{5}$) e *D*(0, $5 + \sqrt{5}$).

d(*C*, *B*) = *d*(*C*, *D*) = 3 (raio da circunferência)

d(*B*, *D*) = $\left|(5+\sqrt{5}) - (5-\sqrt{5})\right| = 2\sqrt{5}$, ou seja, $\overline{CB} = \overline{CD}$, mas $\overline{BD} \neq \overline{CB}$.

Conclui-se, então, que o triângulo é isósceles, pois tem dois lados iguais, mas não é equilátero.

3.3. Seja $P(x, y)$ um qualquer ponto da mediatriz de [*BC*]:

$$d(B,P) = d(C,P) \Leftrightarrow \sqrt{(x-0)^2 + \left(y-(5-\sqrt{5})\right)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-5)^2}$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2(5-\sqrt{5})y + (5-\sqrt{5})^2 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25$$

$$\Leftrightarrow -10y + 2\sqrt{5}y + 25 - 10\sqrt{5} + 5 = -4x - 10y + 29$$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{5}y = -4x + 10\sqrt{5} - 1$$

$$\Leftrightarrow y = -\underbrace{\frac{4}{2\sqrt{5}}}_{(\times\sqrt{5})}x + \underbrace{\frac{10\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}_{(\times\sqrt{5})}$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{2\sqrt{5}}{5}x + \frac{50-\sqrt{5}}{10}$$

4. Opção (D)

$$a^{\frac{1}{2}}\, b^{\frac{2}{3}}\, c^{-\frac{5}{6}} = \sqrt{a} \times \sqrt[3]{b^2} \times \frac{1}{\sqrt[6]{c^5}} =$$

$$= \sqrt[6]{a^3} \times \sqrt[6]{b^4} \times \frac{1}{\sqrt[6]{c^5}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{a^3 \times b^4}{c^5}}$$

5.

5.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (-4, -4)$

Para $\vec{u}$ ser colinear com $\overrightarrow{AB}$, tem de ser da forma $(-4k, -4k), k \in$ IR, e para ter norma igual a $\sqrt{11}$, tem que:

$$\sqrt{(-4k)^2 + (-4k)^2} = \sqrt{11} \Leftrightarrow \sqrt{16k^2 + 16k^2} = \sqrt{11}$$

$$\Leftrightarrow 32k^2 = 11$$

$$\Leftrightarrow k^2 = \frac{11}{32}$$

$$\Leftrightarrow k = \pm\sqrt{\frac{11}{32}}$$

Para $\vec{u}$ ter sentido contrário ao de $\overrightarrow{AB}$:

$$k = -\frac{\sqrt{11}}{\sqrt{32}} = -\frac{\sqrt{11}}{4\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{11} \times \sqrt{2}}{4\sqrt{2} \times \sqrt{2}} =$$

$$= -\frac{\sqrt{22}}{4 \times 2} =$$

$$= -\frac{\sqrt{22}}{8}$$

Cálculo auxiliar

32	2
16	2
8	2
4	2
2	2

Assim, $\vec{u} = \left(-4 \times \left(-\frac{\sqrt{22}}{8}\right), -4 \times \left(-\frac{\sqrt{22}}{8}\right)\right) = \left(\frac{\sqrt{22}}{2}, \frac{\sqrt{22}}{2}\right)$.

5.2.

5.2.1. Circunferência de centro em *A* e raio $\overline{OA}$:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5$$

Condição que define o conjunto de pontos pretendido:

$$(x-1)^2+(y-2)^2<5 \ \wedge \ x>0 \ \wedge \ y<0$$

Cálculo auxiliar
$\overline{OA}=d(O,A)=$
$=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=$
$=\sqrt{5}$

5.2.2. Equação da reta *AB*:

$\overrightarrow{AB}=(-4,-4)$

$m_{AB}=\dfrac{-4}{-4}=1$

$y=x+b$

$2=1+b$

$\Leftrightarrow b=1$

$AB: y=x+1$

Interseção da circunferência com a reta *AB*:

$$(x-1)^2+(y-2)^2=5 \ \wedge \ y=x+1$$

Assim:

$(x-1)^2+(x+1-2)^2=5 \Leftrightarrow (x-1)^2+(x-1)^2=5$

$\Leftrightarrow 2(x-1)^2=5$

$\Leftrightarrow (x-1)^2=\frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow x-1=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+1 \ \vee \ x=-\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}+1$

$\Leftrightarrow x=\frac{\sqrt{10}}{2}+1 \ \vee \ x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1$

Coordenadas dos ponto de interseção: $\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+1,\frac{\sqrt{10}}{2}+2\right)$ e $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}+1,-\frac{\sqrt{10}}{2}+2\right)$

5.3. Opção (B)

$P(k,k-6)$

$A(1,2)$

$B(-3,-2)$

$d(P,A)=d(P,B)$

$\sqrt{(k-1)^2+(k-6-2)^2}=\sqrt{(k+3)^2+(k-6+2)^2}$

$\Leftrightarrow (k-1)^2+(k-8)^2=(k+3)^2+(k-4)^2$

$\Leftrightarrow k^2-2k+1+k^2-16k+64=k^2+6k+9+k^2-8k+16$

$\Leftrightarrow -18k + 65 = -2k + 25$

$\Leftrightarrow -16k = -40$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{40}{16}$

$\Leftrightarrow k = \dfrac{5}{2}$

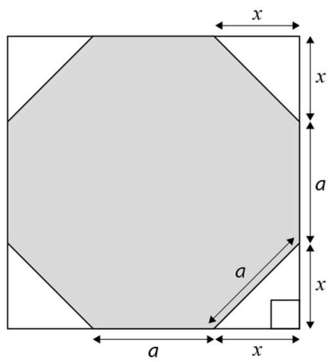
6. Opção (A)

$$a^2 + 2ab + b^2 - c^2 = (a+b)^2 - c^2 = \underbrace{((a+b)-c)}_{\sqrt[4]{25}} \times \underbrace{((a+b)+c)}_{\sqrt{5}} =$$
$$= \sqrt[4]{5^2} \times \sqrt{5} =$$
$$= \sqrt{5} \times \sqrt{5} =$$
$$= 5$$

7. Designando por x os lados iguais dos triângulos isósceles, tem-se que:

(1) a área do quadrado pode ser dada por $(a+2x)^2$;

(2) a área de cada triângulo isósceles pode ser dada por $\frac{x \times x}{2} = \frac{x^2}{2}$.



De (1) e (2), vem que a área do octógono pode ser dada por:

$$(a+2x)^2 - 4 \times \frac{x^2}{2} = a^2 + 4ax + 4x^2 - 2x^2 =$$
$$= a^2 + 4ax + 2x^2$$

Como os triângulos considerados são retângulos, tem-se que:

$$x^2 + x^2 = a^2 \Leftrightarrow 2x^2 = a^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{2}$$

Como $x > 0$ e $a > 0$, então $x = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Assim:

$$A_{\text{octógono}} = a^2 + 4ax + 2x^2 = a^2 + 4a \times \frac{a\sqrt{2}}{2} + 2 \times \frac{a^2}{2} =$$
$$= a^2 + 2a^2\sqrt{2} + a^2 =$$
$$= 2a^2 + 2a^2\sqrt{2} =$$
$$= 2a^2(1+\sqrt{2}) \qquad \text{c.q.d.}$$