Novo Espaço – Matemática A 12.º ano

Proposta de Teste [março - 2018]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Cinco ovos de páscoa, dos quais apenas dois são iguais, vão ser distribuídos por duas prateleiras para decorar uma montra.

Indica o número de maneiras diferentes que pode ser feita a decoração, ficando dois ovos numa prateleira e três na outra, não ficando os dois ovos iguais na mesma prateleira**.**

(A) 24 **(B)** 72 **(C)** 36 **(D)** 240

2. Numa região, em 2017, um grande incêndio consumiu 58 000 hectares de floresta.

Foi feito um plano de reflorestação da área ardida.

Admita que *t* anos, após o fim do incêndio, a área por reflorestar, em hectares, é dada, para um certo valor de *k* positivo, pela função F definida por $F(t)=58\,000\mathrm{e}^{-kt}$ $(t \geq 0)$.

Por processos exclusivamente analíticos, resolve as questões seguintes, recorrendo à calculadora para efetuar apenas cálculos numéricos.

2.1. Determina o valor de k, arredondado às centésimas, no caso de decorridos 2 anos estar reflorestada 58% da área ardida.

2.2. Considera $k=0{,}65$.

a) Calcula $\dfrac{F(t+1)}{F(t)}$, arredondado às centésimas, e interpreta o resultado no contexto apresentado.

b) O plano é considerado cumprido quando faltar reflorestar 2% da área ardida.

Em que ano se prevê que o plano seja cumprido?

3. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\cos(5x)\cos(3x)+\sin(5x)\sin(3x)$$

3.1. Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x)=1-2\sin^2 x$.

3.2. Sabe-se que o período positivo mínimo de *f* é π.

Indica o número de soluções da equação $f(x)=\frac{1}{3}$, no intervalo $[-350\pi, 127\pi]$.

(A) 477 **(B)** 446 **(C)** 956 **(D)** 954

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.1.**	**2.2.a)**	**2.2.b)**	**3.1.**	**3.2.**	
Pontos	10	15	15	15	15	10	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

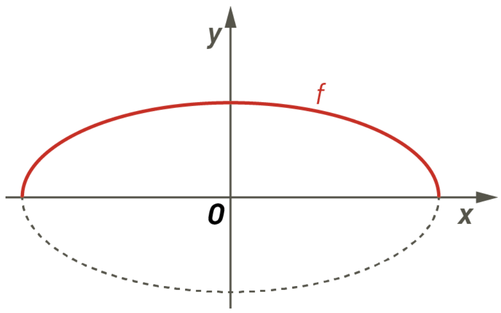
4. Considera a função *f* , de domínio $[-5,5]$, definida por $f(x)=\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$.

4.1. Seja *r* a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa -3.

Determina na forma reduzida uma equação da reta *r*.

4.2. Recorre ao Teorema de Bolzano e mostra que existe um ponto do gráfico de *f* com abcissa pertencente ao intervalo $]3,4[$ em que a reta tangente ao gráfico nesse ponto é paralela à reta de equação $x+2y=0$.

4.3. Na figura está representado o gráfico da função *f* que é uma semielipse de focos F_1 e F_2.



Seja *P* um ponto qualquer do gráfico de *f*. Podes concluir que $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}$ é igual a:

(A) 5 **(B)** 4 **(C)** 10 **(D)** 14

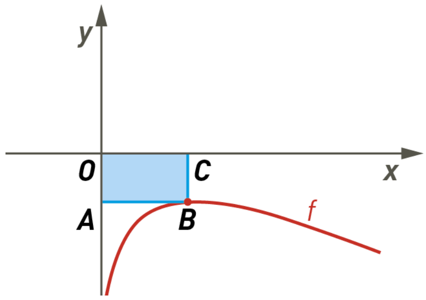
5. Seja k um número real positivo e *f* a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(3x)}{e^x-1} & \text{se } x\neq 0\\ 2^k & \text{se } x=0\end{cases}$$

Determina *k* sabendo que a função é contínua.

6. Seja k um número real positivo e f a função definida por $f(x)=\ln(kx)-kx$, $k>0$.

Na figura estão representados o gráfico de f e um retângulo [$OABC$].



Sabe-se que:

- a ordenada do ponto B é máximo absoluto da função f;
- o ponto A pertence a Oy e tem ordenada igual à de B;
- o ponto C pertence a Ox e tem abcissa igual à de B.

6.1. Determina k , no caso em que a área do retângulo é $0{,}25$.

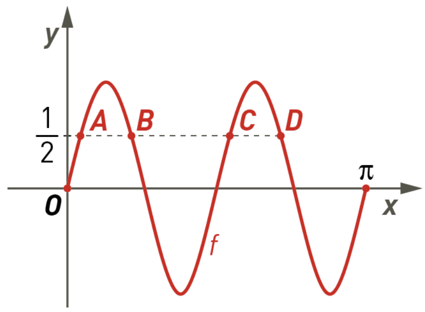
6.2. Considera $k=2$.

a) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, começando por mostrar que $f(x)=\ln\left(\dfrac{2x}{e^{2x}}\right)$.

b) Calcula $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

7. Na figura, em referencial o.n. xOy, está representada a função f, de domínio $[0,\pi]$, definida por:

$$f(x)=\sin(3x)\cos x+\cos(3x)\sin x$$



7.1. Calcula $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{f(x)}{x}$.

7.2. O gráfico da função f interseta a reta $y=\dfrac{1}{2}$ em quatro pontos: A, B, C e D tal como é indicado na figura.

Determina a distância entre B e C.

FIM (Caderno 2)

Cotações											
	Caderno 1 (com calculadora)										
Questões	1.	2.1.	2.2.a)	2.2.b)	3.1.	3.2.					
Pontos	15	15	10	15	15	10				Total	80
	Caderno 2 (sem calculadora)										
Questões	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.a)	6.2.b)	7.1.	7.2.		
Pontos	15	15	10	15	15	13	10	12	15	Total	120
Total											200

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;*
r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: *Semiperímetro* $\times$ *Apótema*

Setor circular: $\dfrac{\alpha r^2}{2}$

(α *– amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\dfrac{1}{3}\times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Cone: $\dfrac{1}{3}\times$ *Área da base* $\times$ *Altura*

Esfera: $\dfrac{4}{3}\pi r^3$ *(r – raio)*

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\dfrac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\dfrac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b)=\sin a\cos b+\sin b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\sin a\sin b$

$\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho\ \mathrm{cis}\ \theta)^n=\rho^n\ \mathrm{cis}(n\theta)$ ou $\left(\rho\, e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\,\mathrm{cis}\ \theta}=\sqrt[n]{\rho}\,\mathrm{cis}\left(\dfrac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\ e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k\in\{0,\ \dots,\ n-1\}$ e $n\in\mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu=p_1x_1+\ldots+p_nx_n$

$\sigma=\sqrt{p_1(x_1-\mu)^2+\ldots+p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu,\sigma)$, então:

$P(\mu-\sigma<X<\mu+\sigma)\approx 0{,}6827$

$P(\mu-2\sigma<X<\mu+2\sigma)\approx 0{,}9545$

$P(\mu-3\sigma<X<\mu+3\sigma)\approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)'=u'+v'$

$(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'\,v-u\,v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}\,u'\quad(n\in\mathbb{R})$

$(\sin u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\sin u$

$(\tan u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\ln a\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a}\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e\quad(n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{e^x}{x^p}=+\infty\quad(p\in\mathbb{R})$

CADERNO 1

(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1.

N.º de possibilidades para escolha da prateleira com dois ovos: 2

N.º de possibilidades para colocar os dois ovos iguais: 2×3

N.º de possibilidades de distribuir os restantes ovos: $3!$

Seja N o n.º de possibilidades final.

$N = 2\times 2\times 3\times 3! = 72$

Há 72 maneiras diferentes de fazer a decoração.

Resposta: Opção: (B)

2.

2.1. Se, decorridos dois anos, está reflorestada 58% da área ardida, então, falta reflorestar 48%.

$F(2)=0,48\times 58000 \Leftrightarrow 58\,000\mathrm{e}^{-2k}=0,48\times 58\,000 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-2k}=0,48 \Leftrightarrow -2k=\ln 0,48 \Leftrightarrow k=-\dfrac{\ln 0,48}{2}$.

Então, $k\approx 0,46$.

Resposta: O valor de k é, aproximadamente, 0,46.

2.2. a) Para $k=0,65$ tem-se $F(t)=58\,000\mathrm{e}^{-0,65t}$, $t\geq 0$.

$$\frac{F(t+1)}{F(t)}=\frac{58000\mathrm{e}^{-0,65(t+1)}}{58000\mathrm{e}^{-0,65t}}=\frac{\mathrm{e}^{-0,65t-0,65}}{\mathrm{e}^{-0,65t}}=\mathrm{e}^{-0,65}\approx 0,52$$

Em cada ano prevê-se que, no ano seguinte, a área por reflorestar será, aproximadamente, 52% da que falta reflorestar nesse ano.

2.2. b) $F(t)=0,02\times 58000 \Leftrightarrow 58000\mathrm{e}^{-0,65t}=0,02\times 58000 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0,65t}=0,02 \Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 0,02}{-0,65}$

Então, $t\approx 6$.

$2017+6=2023$

Resposta: Prevê-se que o plano seja cumprido em 2023.

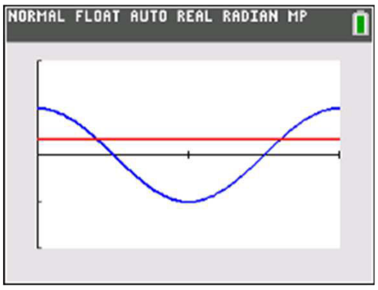
3.

3.1. $D_f = \mathbb{R}$

$f(x)=\cos(5x)\cos(3x)+\sin(5x)\sin(3x) \Leftrightarrow f(x)=\cos(5x-3x) \Leftrightarrow f(x)=\cos(2x) \Leftrightarrow$
$f(x)=\cos^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow f(x)=1-\sin^2 x-\sin^2 x \Leftrightarrow f(x)=1-2\sin^2 x$

Tem-se, $\forall x\in\mathbb{R}, \quad f(x)=1-2\sin^2 x$, como se pretendia mostrar.

3.2. Recorrendo à calculadora gráfica é possível identificar o número de soluções em $[0,\pi]$.



Observa-se que há duas soluções.

Como o período positivo mínimo de f é π, em $[0,127\pi]$ há 254 soluções e em $[-350\pi,0[$ há 700 soluções.

Conclui-se que em $[-350\pi , 127\pi]$ há 954 soluções.

Resposta: Opção (D) 954

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora gráfica)

4. $f(x)=\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}$, domínio $[-5,5]$

4.1. Seja P o ponto de tangência.
$P(-3,f(-3))$.
$f(-3)=\frac{2}{5}\times\sqrt{25-9}=\frac{8}{5}$
Assim, $P\left(-3,\frac{8}{5}\right)$.

$f'(x)=\left(\frac{2}{5}\sqrt{25-x^2}\right)'=\frac{2}{5}\times\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}=-\frac{2x}{5\sqrt{25-x^2}}$

$f'(-3)=\frac{6}{5\times4}=\frac{3}{10}$

A equação da reta tangente no ponto de abcissa -3 é do tipo $y=\frac{3}{10}x+b$.

O ponto $P\left(-3,\frac{8}{5}\right)$pertence à referida reta. Então, $\frac{8}{5}=-\frac{9}{10}+b$. Daqui resulta que $b=\frac{5}{2}$.

Uma equação, na forma reduzida, da reta tangente ao gráfico de f, no ponto de abcissa -3 é $y=\frac{3}{10}x+\frac{5}{2}$.

Resposta: $y=\frac{3}{10}x+\frac{5}{2}$

4.2. A função derivada de *f* é definida por $f'(x)=-\dfrac{2x}{5\sqrt{25-x^2}}$, sendo o domínio $]-5,5[$.

$x+2y=0 \Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{2}x$ (declive da reta é $-\dfrac{1}{2}$).
Duas retas são paralelas se e só se têm igual declive.

Assim, pretende-se provar que a equação $f'(x)=-\dfrac{1}{2}$ é possível no intervalo $]3,4[$.

A função f' é contínua no seu domínio, ou seja, em $]-5,5[$. Então é contínua em $[3,4]$, atendendo a que $[3,4]\subset]-5,5[$.

$f'(3)=\dfrac{-6}{5\sqrt{16}}=-\dfrac{3}{10}=-\dfrac{9}{30}$; $f'(4)=\dfrac{-8}{5\sqrt{9}}=-\dfrac{8}{15}=-\dfrac{16}{30}$ e $-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{15}{30}$.

Daqui resulta que $f'(4)<-\dfrac{1}{2}<f'(3)$.

Sendo *f* contínua em $[3,4]$ e $f'(4)<-\dfrac{1}{2}<f'(3)$, pelo Teorema de Bolzano, conclui-se que

$\exists c\in]3,4[: \ f'(c)=-\dfrac{1}{2}$. Como se pretendia provar.

4.3. Vértices extremos do eixo maior: $(-5,0)$ e $(5,0)$.
Daqui resulta que o eixo maior da elipse, $2a$, é igual a 10.
Assim, tem-se: $\overline{PF_1}+\overline{PF_2}=2a=10$

Resposta: Opção **(C)** 10

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{e^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{\sin(3x)}{3x}\times 3x}{\dfrac{e^x-1}{x}\times x}=3\times\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}}$

Repara que:

Fazendo $3x=y$, como $x\to 0$, então $y\to 0$, temos: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{\sin y}{y}=1$ (limite notável)

E também se sabe que $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$ (limite notável).

Então, $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{e^x-1}=3\times\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{3x}}{\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}}=3\times\dfrac{1}{1}=3$.

Como a função é contínua $f(0)=3$, ou seja, $2^k=3\Leftrightarrow k=\log_2(3)$.

Resposta: $k=\log_2(3)$

6. $f(x)=\ln(kx)-kx \; , \; k>0$

6.1. $f'(x)=\left(\ln(kx)-kx\right)'=\frac{k}{kx}-k=\frac{1}{x}-k=\frac{1-kx}{x}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{1-kx}{x}=0 \Leftrightarrow 1-kx=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{k}$

x	0		$\frac{1}{k}$	$-\infty$
$f'(x)$		+	0	–
f		↗	$f\left(\frac{1}{k}\right)$	↘

$f\left(\frac{1}{k}\right)=\ln(1)-1=0-1=-1$

O ponto B tem coordenadas $\left(\frac{1}{k},f\left(\frac{1}{k}\right)\right)$, ou seja, $\left(\frac{1}{k},-1\right)$.

Área do retângulo $[OABC]$ é dada por: $|-1|\times\frac{1}{k}=\frac{1}{k}$.

Se $\frac{1}{k}=0{,}25$, ou seja, $\frac{1}{k}=\frac{1}{4}$, tem-se $k=4$.

Resposta: $k=4$

6.2. Se $k=2$, tem-se $f(x)=\ln(2x)-2x$.

a) $f(x)=\ln(2x)-2x \Leftrightarrow f(x)=\ln(2x)-\ln\left(e^{2x}\right) \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{2x}{e^{2x}}\right)=\ln\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\frac{e^{2x}}{2x}}\right)=\ln\left(\frac{1}{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}}\right).$$

Fazendo $2x=y$, se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^{2x}}{2x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}=+\infty$ (limite notável)

Então, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\ln\left(\frac{1}{\lim\limits_{y\to+\infty}\frac{e^{y}}{y}}\right)=\ln\left(0^{+}\right)=-\infty$.

Resposta: $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x)-2x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(2\dfrac{\ln(2x)}{2x}-2\right)$

Fazendo $2x=y$, se $x\to+\infty$, então $y\to+\infty$.

Assim, $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln(2x)}{2x}=\lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{\ln y}{y}=0$ (limite notável)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}\lim_{x\to+\infty}\left(2\frac{\ln(y)}{y}-2\right)=2\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(y)}{y}-2=2\times0-2=-2$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=-2$

7. $f(x)=\sin(3x)\cos x+\cos(3x)\sin x$

$f(x)=\sin(3x)\cos x+\cos(3x)\sin x=\sin(3x+x)=\sin(4x)$

7.1.

$$\lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(4x)}{x}=4\lim_{x\to0^+}\frac{\sin(4x)}{4x}=4\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=4\times1=4$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{f(x)}{x}=4$

7.2. $f(x)=\dfrac{1}{2}\wedge x\in[0,\pi]$

$$f(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\sin(4x)=\sin\frac{\pi}{6}\Leftrightarrow4x=\frac{\pi}{6}+2k\pi\vee4x=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{24}+\frac{k\pi}{2}\vee x=\frac{5\pi}{24}+\frac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x=\frac{\pi+12k\pi}{24}\vee x=\frac{5\pi+12k\pi}{24},\ k\in\mathbb{Z}$$

Como $x\in[0,\pi]$, as soluções, por ordem crescente, são:

$$x=\frac{\pi}{24}\vee x=\frac{5\pi}{24}\vee x=\frac{13\pi}{24}\vee x=\frac{17\pi}{24}$$

Assim, a distância entre os pontos B e C é dada por $\dfrac{13\pi}{24}-\dfrac{5\pi}{24}=\dfrac{8\pi}{24}=\dfrac{\pi}{3}$.

Resposta: $\overline{BC}=\dfrac{\pi}{3}$