Teste de Matemática A

2017 / 2018

Teste N.º 5

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}$ $\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a\, \cos b + \operatorname{sen} b\, \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a\, \cos b - \operatorname{sen} a\, \operatorname{sen} b$

$\frac{\operatorname{sen} A}{a} = \frac{\operatorname{sen} B}{b} = \frac{\operatorname{sen} C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2\, b\, c \cos A$

Complexos

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta+2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\theta}{n}+\frac{2k\pi}{n}\right)}$

($k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(u.v)' = u'.v + u.v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'.v - u.v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,.\,u^{n-1}.u' \; (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u'.\cos u$

$(\cos u)' = -u'.\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'.e^u$

$(a^u)' = u'.a^u.\ln a \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u\,.\ln a} \; (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

Limites notáveis

$\lim \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \; (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \; (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1: 45 MINUTOS

É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

1. Considere a linha do triângulo de Pascal cujo segundo elemento é 2018. Escolhendo, ao acaso, dois elementos dessa linha, qual é a probabilidade do seu produto ser inferior a 10 000?

(A) $\frac{2}{2\,037\,171}$ **(B)** $\frac{5}{2\,037\,171}$ **(C)** $\frac{6}{2\,035\,153}$ **(D)** $\frac{12}{2\,035\,153}$

2. Sejam E um conjunto finito, não vazio, P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e A e B dois acontecimentos possíveis em E. Sabe-se que:

- A e B são equiprováveis;
- $P(A\mid B) = P(A)$;
- $P(A \cup B) = 0{,}84$.

Qual é o valor $P(A \cap \overline{B}\,)$?

(A) $0{,}24$ **(B)** $0{,}36$ **(C)** $0{,}6$ **(D)** $0{,}64$

3. O nível N, em decímetros, de água no depósito do sistema de arrefecimento de uma máquina é dado, em função do tempo t, em horas, por:

$$N(t) = t\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{12}{\pi}\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) + 10,\ t \in [0{,}24]$$

(o argumento da função seno e o argumento da função cosseno estão expressos em radianos.)

3.1. Sejam M e m, respetivamente, o máximo e o mínimo absolutos da função N no intervalo $[0{,}24]$. A amplitude A do nível de água no depósito, neste intervalo, é dada por $A = M - m$. Determine o valor de A, recorrendo a métodos analíticos e utilizando a calculadora apenas para efetuar eventuais cálculos numéricos. Apresente o resultado em decímetros.

3.2. Determine a taxa média de variação da função N no intervalo $[3{,}6]$. Apresente o resultado arredondado às décimas. Interprete o resultado no contexto da situação descrita.

3.3. Em $[0{,}24]$, o conjunto-solução da inequação $N(t) > 20$ é um intervalo da forma $]a, b[$. Determine o valor de $b - a$, arredondado às centésimas, recorrendo à calculadora gráfica, e interprete o resultado obtido no contexto da situação descrita.

Na sua resposta:

– reproduza o gráfico da função N visualizado na calculadora;

– apresente o valor de a e o valor de b arredondados às milésimas;

– apresente o valor de $b - a$ arredondado às centésimas;

– interprete o valor obtido no contexto da situação descrita.

4. A Alice depositou as suas poupanças num banco com um plano de juros compostos com capitalizações semestrais. Qual é a taxa de juro anual mínima para que o capital ao fim de dez anos seja o dobro do capital inicial?

(A) $3{,}53\%$

(B) $7{,}05\%$

(C) $7{,}18\%$

(D) $14{,}35\%$

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item						
Cotação (em pontos)						
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	
8	8	20	20	20	8	**84**

CADERNO 2: 45 MINUTOS

NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.

5. Uma caixa contém n cartões indistinguíveis ao tato, numerados de 1 a n (sendo n par e superior a 8). Retira-se, ao acaso, um cartão da caixa.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: ”o número do cartão retirado é ímpar.”

B: ”o número do cartão retirado é maior do que 8.”

Escreva o significado de $P(B|\overline{A})$ no contexto da situação descrita e determine uma expressão, em função de n, que dê esta probabilidade.

Apresente a expressão na forma de uma fração.

6. Sejam f e g duas funções reais de variável real de domínio $\mathbb{R}^+$.

Sabe-se que a reta de equação $y = 2x + 1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f e que g é definida por $g(x) = e^x + \ln(x) + \operatorname{sen}(x)$.

Qual é o valor de $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x) - g(x)}{x}$?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** $+\infty$ **(D)** $-\infty$

7. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^x + 6\,e^{-x} - 5$.

Determine analiticamente os valores de x para os quais a função f é positiva.

8. Seja a um número real superior a 1. A expressão $(\ln(a^3) + \ln(a^4) + \ln(a^5)) \times (\ln 36)^{-1}$ é igual a:

(A) $6\log_6(a)$ **(B)** $-6\log_{36}(a)$ **(C)** $6\ln\left(\frac{a}{6}\right)$ **(D)** $-24\ln(6a)$

9. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1 - e^{x+1}}{x^2 - 1} & \text{se} \quad x < -1 \\ x + \ln(1 + x^2) & \text{se} \quad x \geq -1 \end{cases}$$

9.1. Estude em $]-\infty, -1[$ a função g quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico.

9.2. Estude em $]-1, +\infty[$ a função g quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente:

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;

– o(s) intervalo(s) em que o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;

– a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g.

10. Seja $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e bijetiva tal que, para um certo número $a \in \mathbb{R}^+$, se tem:

- $(a, -a)$ pertence ao gráfico de f;
- $(a, f(a))$ pertence ao gráfico de f^{-1} (f^{-1} representa a função inversa de f).

Mostre que a função f tem um único zero em $]f(a), a[$.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	
20	8	20	8	20	20	20	**116**

TESTE N.º 5 – Proposta de resolução

Caderno 1

1. Opção (B)

A linha do triângulo de Pascal cujo segundo elemento é 2018 é a linha cujos elementos são da forma ${}^{2018}C_k$, com $k \in \mathbb{Z}$ e $0 \leq k \leq 2018$. Esta linha tem 2019 elementos.

Escolhendo, ao acaso, dois elementos dessa linha, o número de casos possíveis é ${}^{2019}C_2$.

Para que o produto dos dois elementos escolhidos seja inferior a 10 000, tem-se apenas 5 casos:

- o caso em que são escolhidos o primeiro e o último elementos da linha (ambos "1"): $1 \times 1 = 1 < 10\,000$;
- os 4 casos em que é escolhido o primeiro elemento ou o último (o "1") e o segundo elemento ou o penúltimo (o "2018"): $1 \times 2018 = 2018 < 10\,000$.

O produto entre quaisquer dois outros elementos será sempre superior a $10\,000$, já que se observa que o terceiro elemento da linha em causa é ${}^{2018}C_2 \ = 2\,035\,153$.

O valor da probabilidade pedida é, então, $\frac{5}{{}^{2019}C_2} = \frac{5}{2\,037\,171}$.

2. Opção (A)

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Como $P(A \cup B) = 0{,}84$ e A e B são equiprováveis, tem-se que:

$0{,}84 = P(A) + P(A) - P(A \cap B)$

Como $P(A|B) = P(A)$, vem que $\frac{P(A\cap B)}{P(B)} = P(A)$ e, assim, $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Como A e B são equiprováveis, $P(A \cap B) = P(A) \times P(A)$.

Logo:

$$0{,}84 = P(A) + P(A) - P(A) \times P(A) \Leftrightarrow \left(P(A)\right)^2 - 2P(A) + 0{,}84 = 0$$
$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \times 1 \times 0{,}84}}{2 \times 1}$$
$$\Leftrightarrow P(A) = \frac{2 \pm \sqrt{0{,}64}}{2}$$
$$\Leftrightarrow P(A) = 1{,}4 \quad \vee \quad P(A) = 0{,}6$$

Como $P(A) < 1$, tem-se que $P(A) = 0{,}6$.

Assim:

$P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) =$

$= 0{,}6 - 0{,}6 \times 0{,}6$ (pois $P(A \cap B) = P(A) \times P(A)$)

$= 0{,}2$

3.

3.1. $N'(t) = \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{12} \times t\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{12}{\pi} \times \frac{\pi}{12}\cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{12}t\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) - \cos\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) =$

$= -\frac{\pi}{12}t\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right)$

$N'(t) = 0$

$-\frac{\pi}{12}t\,\text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{12}t = 0 \quad \vee \quad \text{sen}\left(\frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2}\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad \frac{\pi}{12}t + \frac{\pi}{2} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t = -\frac{\pi}{2} \times \frac{12}{\pi} + k\pi \times \frac{12}{\pi}, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow t = 0 \quad \vee \quad t = -6 + 12k, k \in \mathbb{Z}$

Em [0, 24]: $t = 0$, $t = 6$ e $t = 18$

x	0		6		18		24
Sinal de N'	0	$-$	0	$+$	0	$-$	$-$
Variação de N	Máx. $N(0)$	$\searrow$	mín. $N(6)$	$\nearrow$	Máx. $N(18)$	$\searrow$	mín. $N(24)$

Cálculos auxiliares

$N'(3) = -\frac{\pi}{4}\text{sen}\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2}\right) = -\frac{\pi}{4} \times \frac{\sqrt{2}}{2} < 0$

$N'(12) = -\pi\,\text{sen}\left(\pi + \frac{\pi}{2}\right) = \pi > 0$

$N'(24) = -2\pi\,\text{sen}\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) = -2\pi < 0$

$N(0) = -\frac{12}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10 = -\frac{12}{\pi} + 10 \approx 6{,}1803$

$N(6) = 6\cos(\pi) - \frac{12}{\pi}\text{sen}(\pi) + 10 = 4 \rightarrow$ mínimo absoluto, pois $4 < -\frac{12}{\pi} + 10$.

$N(18) = 18\cos(2\pi) - \frac{12}{\pi}\text{sen}(2\pi) + 10 = 28 \rightarrow$ máximo absoluto, pois $28 > -\frac{12}{\pi} + 10$.

$N(24) = 24\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - \frac{12}{\pi}\text{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) + 10 = -\frac{12}{\pi} + 10 \approx 6{,}1803$

Logo, $A = 28 - 4 = 24$ dm

3.2. A taxa média de variação da função N no intervalo [3, 6] é dada por:

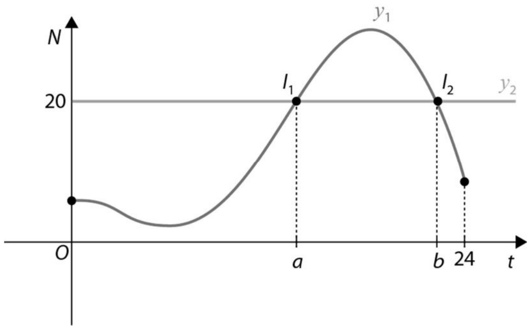
$\frac{N(6) - N(3)}{6 - 3} = \frac{6\cos(\pi) - \frac{12}{\pi}\text{sen}(\pi) + 10 - \left(3\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) - \frac{12}{\pi}\text{sen}\left(\frac{3\pi}{4}\right) + 10\right)}{3} =$

$= \frac{-6 + 10 + \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{12}{\pi} \times \frac{\sqrt{2}}{2} - 10}{3} =$

$= -2 + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \approx -0{,}4$

Entre as 3 e as 6 horas, o nível N, de água no depósito do sistema de arrefecimento diminuiu, em média, 0,4 dm por hora, aproximadamente.

3.3.



$y_1 = N(t)$

$y_2 = 20$

$I_1(a, 20)$ e $I_2(b, 20)$

$a \approx 13{,}903 \qquad b \approx 21{,}513$

$b - a \approx 21{,}513 - 13{,}903 = 7{,}61$

O nível N de água no depósito do sistema de arrefecimento da máquina é superior a 20 dm durante $7{,}61$ horas, aproximadamente.

4. Opção (B)

$$C_0\left(1+\frac{r}{100\times 2}\right)^{2\times 10} = 2C_0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{r}{200}\right)^{20} = 2 \underset{\Leftrightarrow}{\overset{1+\frac{r}{200}>0}{}} 1+\frac{r}{200} = \sqrt[20]{2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{r}{200} = \sqrt[20]{2} - 1$$

$$\Leftrightarrow r = \left(\sqrt[20]{2} - 1\right) \times 200$$

$$\Leftrightarrow r \approx 7{,}05$$

Caderno 2

5. $P(B|\overline{A})$ significa a probabilidade de o número do cartão retirado ser maior do que 8, sabendo que o número do cartão retirado é par.

Ora, admitindo que o número do cartão retirado é par, existem $\frac{n}{2}$ casos possíveis, pois n é par.

Destes, apenas $\frac{n}{2} - 4$ são superiores a 8 (pois retiramos os cartões numerados com os números 2, 4, 6 e 8).

Assim, $\frac{\frac{n}{2}-4}{\frac{n}{2}} = \frac{n-8}{n}$ é a probabilidade pedida.

6. Opção (D)

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)-g(x)}{x}\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x+\ln x+\operatorname{sen} x}{x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} - \left(\underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x}}_{\text{limite notável}} + \underbrace{\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}}_{\text{limite notável}} + \lim_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right) =$$

$$= 2 - \left((+\infty) + 0 + 0\right) = -\infty$$

Observe-se que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=2$, pois a reta de equação $y=2x+1$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f e o seu declive é 2;
- $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\operatorname{sen}x}{x}=0$, pois $-1\leq \operatorname{sen}x\leq 1, \forall x\in\mathbb{R}$ e $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$, logo $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\operatorname{sen}x\times\frac{1}{x}\right)=0$.

7. Pretende-se determinar os valores de x para os quais $f(x)>0$:

$$e^x+6e^{-x}-5>0 \Leftrightarrow e^x+\frac{6}{e^x}-5>0$$
$$\Leftrightarrow (e^x)^2+6-5e^x>0$$
$$\Leftrightarrow e^x<2 \quad \vee \quad e^x>3$$
$$\Leftrightarrow x<\ln 2 \quad \vee \quad x>\ln 3$$

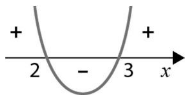
$\text{C.S.}=\left]-\infty,\ln 2\right[\cup\left]\ln 3,+\infty\right[$

A função f é positiva em $\left]-\infty,\ln 2\right[$ e em $\left]\ln 3,+\infty\right[$.

Cálculos auxiliares

Seja $y=e^x$:

$$y^2+6-5y=0 \Leftrightarrow y=\frac{5\pm\sqrt{(-5)^2-4\times1\times6}}{2\times1}$$
$$\Leftrightarrow y=\frac{5+1}{2} \quad \vee \quad y=\frac{5-1}{2}$$
$$\Leftrightarrow y=3 \quad \vee \quad y=2$$



Assim:

$y^2-5y+6>0$

$\Leftrightarrow y<2 \ \vee \ y>3$

8. Opção (A)

$$(\ln(a^3)+\ln(a^4)+\ln(a^5))\times(\ln 36)^{-1}=\frac{\ln(a^3\times a^4\times a^5)}{\ln 36}=\frac{\ln(a^{12})}{\ln(6^2)}=$$
$$=\frac{12\ln(a)}{2\ln(6)}=$$
$$=6\frac{\ln(a)}{\ln(6)}=$$
$$=6\log_6(a)$$

9.

9.1.

- **Assíntotas verticais**

Como g é contínua em $\left]-\infty,-1\right[$, por, neste intervalo, se tratar do quociente de duas funções contínuas, apenas a reta de equação $x=-1$ é candidata a assíntota vertical ao gráfico de g:

$$\lim_{x\to-1^-}g(x)=\lim_{x\to-1^-}\frac{1-e^{x+1}}{x^2-1}=-\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\times\lim_{x\to-1^-}\frac{1}{x-1}=$$
$$=-\lim_{x\to-1^-}\frac{e^{x+1}-1}{x+1}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=-\lim_{y\to0^-}\frac{e^{y}-1}{y}\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=-1\times\left(-\frac{1}{2}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}$$

Considerando a mudança de variável $y=x+1$:

$x\to-1^-\Rightarrow y\to0^-$

Como o valor obtido é um número real, conclui-se que a reta de equação $x = -1$ não é assíntota vertical ao gráfico de g.

- **Assíntota horizontal**

$$\lim_{x \to -\infty} g(x) = \lim_{x \to -\infty} \frac{1 - e^{x+1}}{x^2 - 1} =$$

$$= \frac{1 - e^{-\infty}}{+\infty - 1} =$$

$$= \frac{1 - 0}{+\infty} =$$

$$= \frac{1}{+\infty} =$$

$$= 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to -\infty$.

9.2. Em $]-1, +\infty[$: $g(x) = x + \ln(1 + x^2)$

$$g'(x) = 1 + \frac{(1+x^2)'}{1+x^2} =$$

$$= 1 + \frac{2x}{1+x^2} =$$

$$= \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

$$g''(x) = \frac{(x^2 + 2x + 1)' \times (x^2 + 1) - (x^2 + 2x + 1) \times (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2} =$$

$$= \frac{(2x+2)(x^2+1) - (x^2+2x+1)2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{2x^3+2x+2x^2+2-2x^3-4x^2-2x}{(x^2+1)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$$

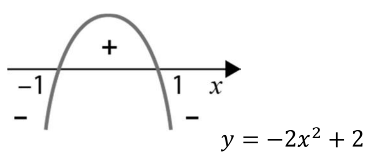
$$g''(x) = 0 \Leftrightarrow -2x^2 + 2 = 0 \quad \wedge \quad \underbrace{(x^2 + 1)^2 \neq 0}_{\text{condição universal em } \mathbb{R}}$$

$$\Leftrightarrow x^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \quad \vee \quad \underbrace{x = -1}_{\notin]-1, +\infty[}$$

$$\Leftrightarrow x = 1$$

x	-1		1	$+\infty$
Sinal de g''		$+$	0	$-$
Sentido das concavidades do gráfico de g		$\cup$	P.I.	$\cap$



O gráfico de g tem a concavidade voltada para cima em $]-1, 1[$ e tem a concavidade voltada para baixo em $]1, +\infty[$; admite um ponto de inflexão de abcissa 1.

10. f é contínua em $[f(a), a]$.

$f(f(a)) = a$, pois se $(a, f(a))$ pertence ao gráfico de f^{-1}, então $(f(a), a)$ pertence ao gráfico de f.

$f(a) = -a$

Como $a \in \mathbb{R}^+$, então $f(a) < 0 < f(f(a))$.

Logo, pelo Teorema de Bolzano-Cauchy, conclui-se que $\exists c \in]f(a), a[: f(c) = 0$, isto é, f tem pelo menos um zero em $]f(a), a[$.

Como f é bijetiva, então é injetiva, logo, está garantida a unicidade do zero de f.