www.esffranco.edu.pt

(2023/2024)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 8

2.º Período | 01/02/2024 | Duração: 90 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere oito livros diferentes, metade dos quais sobre culinária.

1.1. Pretende-se dispor, numa prateleira de uma estante, esses oito livros.

De quantas maneiras diferentes o podemos fazer, de tal forma que os três primeiros livros, do lado esquerdo, sejam de culinária?

(A) 480 **(B)** 960 **(C)** 2880 **(D)** 5760

1.2. Escolhem-se, ao acaso, quatro dos livros.

Determine a probabilidade de pelo menos um deles ser sobre culinária.

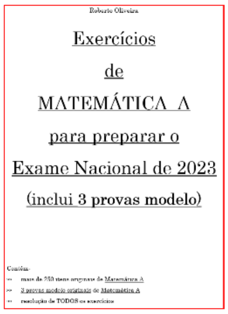
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.

2. Uma partícula desloca-se sobre uma reta numérica, cuja unidade é o metro.

A abcissa da respetiva posição no instante t, em segundos, á dada por $p(t)=t^3-8t^2$, com $t>0$.

Qual é a aceleração da partícula, em m/s², no instante em que passa na origem?

(A) 0 **(B)** –9,8 **(C)** 64 **(D)** 32



3. Seja f a função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{-5\}$ e tal que $f'(x)=(x+5)^2+\frac{16}{x+5}$.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, se existirem.

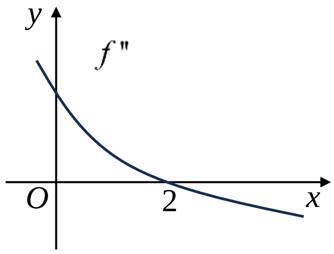
4. Seja k um número real não nulo.

Considere a função h, diferenciável em $\mathbb{R}$, definida por $h(x) = k\sqrt{2x^2 - 4x + 3}$.

Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de h no ponto de abcissa -1 tem declive 5.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de k.

5. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$.



Na figura, está representada parte do gráfico da função f'', segunda derivada da função f.

Tal como a figura sugere, 2 é um zero de f''.

Sejam r e s as retas tangentes ao gráfico de f com declive máximo e com declive mínimo, respetivamente.

Pode concluir-se que:

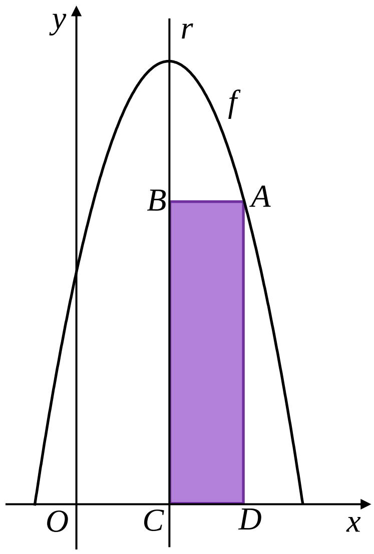
(A) a abcissa do ponto de tangência da reta r é 0.

(B) a abcissa do ponto de tangência da reta r é 2.

(C) a abcissa do ponto de tangência da reta s é 0.

(D) a abcissa do ponto de tangência da reta s é 2.

6. Na figura ao lado, está parte do gráfico da função f, de domínio $\mathbb{R}$, a reta r, eixo de simetria desse gráfico e o retângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

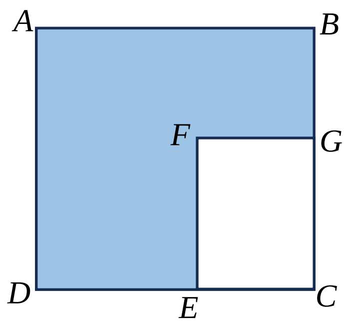
- $f(x) = 5 + 4x - x^2$;
- o vértice A pertence ao gráfico de f e tem abcissa x, com $2 < x < 5$;
- o vértice B pertence à reta r e tem a mesma ordenada de A;
- o vértice C pertence à reta r e ao eixo Ox;
- o vértice D pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa de A.

Seja $g(x)$ a área do retângulo $[ABCD]$, em função de x.

6.1. Mostre que $g(x) = -x^3 + 6x^2 - 3x - 10$.

6.2. Determine, sem usar a calculadora, o valor de x para o qual a área do retângulo $[ABCD]$ é máxima.

7. Considere os retângulos $[ABCD]$ e $[CEFG]$ da figura.



Sabe-se que, para um certo número real x:

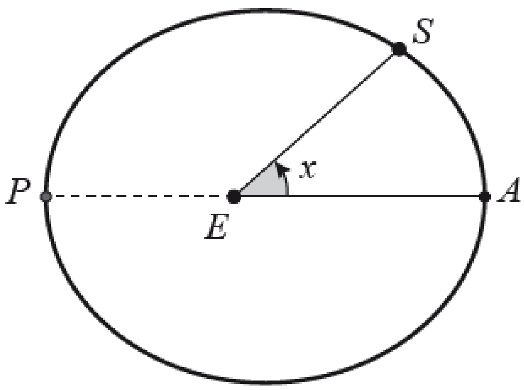
- $\overline{AB} = \cos x$ e $\overline{AD} = \frac{\sqrt{3}}{2}$;
- $\overline{FG} = \operatorname{sen} x$ e $\overline{FE} = \frac{1}{2}$.

Qual das expressões a seguir dá área a sombreado da figura?

(A) $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ **(B)** $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$

(C) $\cos\left(\frac{\pi}{3} + x\right)$ **(D)** $\cos\left(\frac{\pi}{6} + x\right)$

8. No seu movimento em torno do Sol, os planetas descrevem órbitas elípticas, pelo que a distância de cada planeta ao Sol varia ao longo do tempo.



Na órbita de um planeta, o afélio é o ponto em que o planeta se encontra a maior distância do Sol e o periélio é o ponto em que o planeta se encontra a menor distância do Sol.

Na figura, apresenta-se um esquema, que não está à escala, da órbita do planeta Saturno, em que:

- o ponto E representa o Sol;
- o ponto A representa o afélio de Saturno;
- o ponto P representa o periélio de Saturno;
- o ponto S representa a posição de Saturno na sua órbita, num dado instante;
- o ponto E pertence à reta AP ;
- x é a amplitude, em radianos, do ângulo orientado AES, cujo lado origem é a semirreta $\dot{E}A$ e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{E}S$, com $x \in [0, 2\pi[$.

Admita que a distância, d, em milhões de quilómetros, de Saturno ao Sol é dada, em função de d, aproximadamente, por

$$d(x) = \frac{1429}{1 - 0,055723\cos(x)}$$

8.1. De acordo com o modelo apresentado, qual é o valor, em milhões de quilómetros e arredondado às unidades, de $\overline{AP}$, distância entre o afélio e o periélio de Saturno?

(A) 3026 **(B)** 2867 **(C)** 2706 **(D)** 160

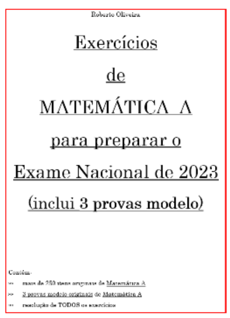
8.2. Para determinados valores de x, a distância de Saturno ao Sol foi superior a 1400 milhões de quilómetros.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, os valores de x (em radianos) na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais.

Na sua resposta, reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a inequação, e apresente as coordenadas do(s) ponto(s) relevante(s) arredondadas às milésimas.

Adaptado do Exame Nacional de Matemática B, 1.ª fase de 2015

9. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \cos(2\pi x) & \text{se} \quad x \leq 1 \\ \dfrac{\text{sen}(2x-2)}{3x-3} & \text{se} \quad x > 1 \end{cases}$.



Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

9.1. Estude a continuidade da função f em $x = 1$.

9.2. Determine a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de interseção entre o gráfico da função f e a reta de equação $y = \cos(\pi x) - 1$, pertencentes ao intervalo $[0,1]$.

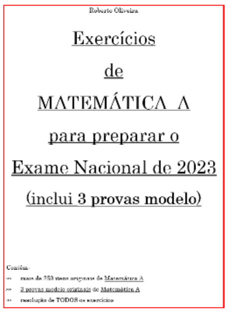
10. Sejam f, g e h as funções, de domínio $\mathbb{R}$, definidas, respetivamente, por

$$f(x) = \operatorname{sen} x \cos x \, , \quad g(x) = 2x \quad \text{e} \quad h(x) = (f \circ g)(x) + \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Determine a expressão geral dos zeros da função h.

11. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{3} \right\}$, definida por $g(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x - \sqrt{3} \cos x}{2\pi - 6x}$.
Sem recorrer à calculadora, estude a função g quanto à existência de assíntotas verticais do seu gráfico, indicando, se existirem, as suas equações.

FIM


Roberto Oliveira
Exercícios
de
MATEMÁTICA A
para preparar o
Exame Nacional de 2023
(inclui 3 provas modelo)

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.**	
8	16	8	16	16	8	16	16	8	8	16	16	16	16	16	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$