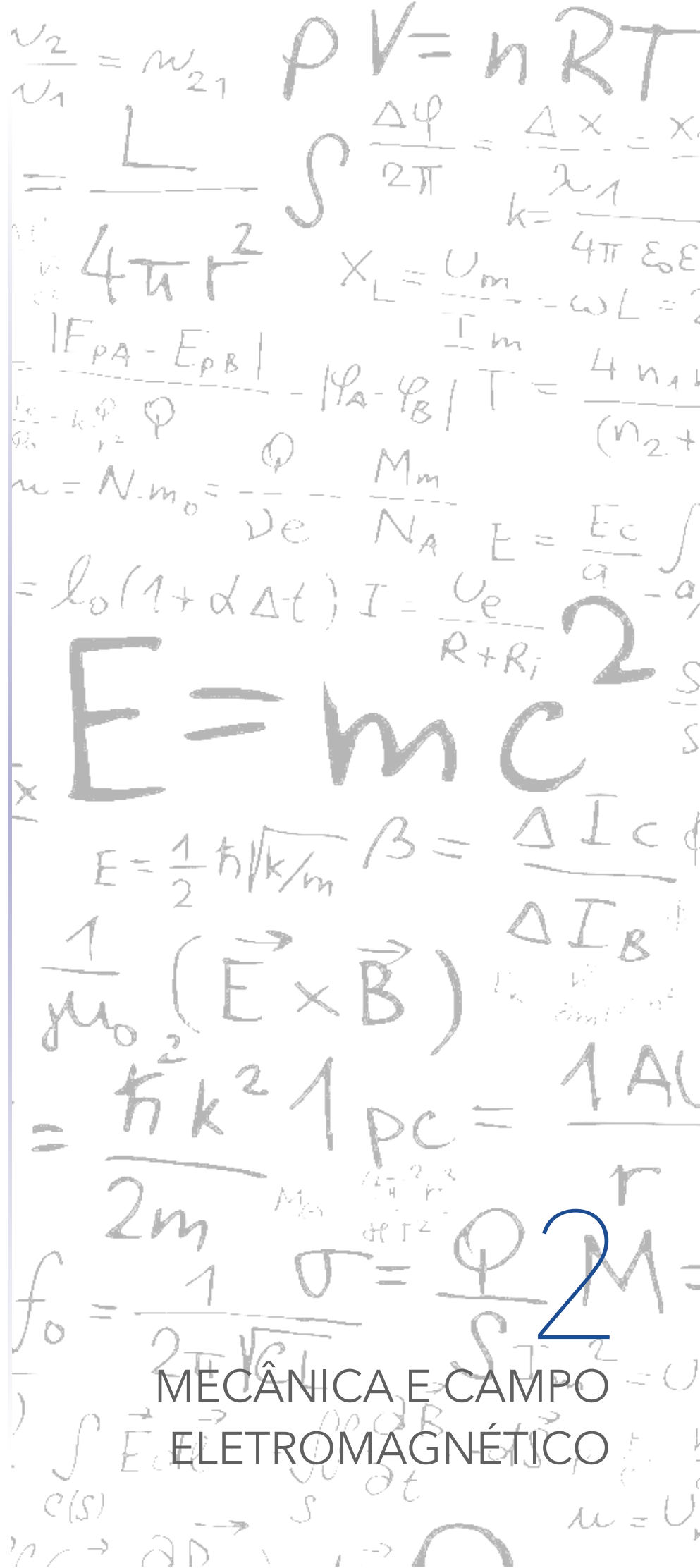


There is no science in this world like physics. Nothing comes close to the precision with which physics enables you to understand the world around you. It's the laws of physics that allow us to say exactly what time the sun is going to rise. What time the eclipse is going to begin. What time the eclipse is going to end.

Neil deGrasse Tyson



Atenção!

Todo o conteúdo deste documento pode conter alguns erros de sintaxe, científicos, entre outros... **Não estude apenas a partir desta fonte.** Este documento apenas serve de apoio à leitura de outros livros, tendo nele contido todo o programa da disciplina de Mecânica e Campo Eletromagnético, tal como foi lecionada, no ano letivo de 2014/2015, na Universidade de Aveiro. Este documento foi realizado por Rui Lopes.

mais informações em ruieduardofalopes.wix.com/apontamentos

A disciplina de Mecânica e Campo Eletromagnético (a2s1) existe no programa curricular do curso de Engenharia de Computadores e Telemática, dada a importância do estudo de vários sistemas físicos, mecânicos e elétricos e a sua inteira relação com a área da computação, desde a integração de componentes num computador, até à integração de novos *softwares* que saibam interagir com diversas variáveis físicas dos próprios componentes instalados numa máquina.

Começando com o estudo de alguns conceitos de mecânica clássica, passando pela descrição de movimentos de corpos indeformáveis e as suas relações com as forças atuantes, importância dos movimentos harmónicos e as suas propriedades, acoplamento de osciladores, interações entre cargas elétricas em regime estacionário, campo magnético, indução, fenómenos ondulatórios e ótica, a disciplina de Mecânica e Campo Eletromagnético (a2s1) potencia o aluno para o estudo e para a adequação de novos sistemas a serem integrados em novas tecnologias, inovando em áreas como a interação humano-computador ou robótica e automação.

1. Fundamentos de Mecânica Clássica

Em anos anteriores, muito provavelmente, já terão sido estudados diversos parâmetros e fundamentos da mecânica clássica em disciplinas como Ciências Físicas e Químicas e Físico-química, do ensino recorrente português. Mas afinal o que é a mecânica clássica, ou antes, o que é a mecânica? A **mecânica** é um ramo da física que compreende o estudo e análise do movimento e de repouso dos corpos, a sua evolução no tempo, os deslocamentos - sob ação de forças atuantes - e os efeitos na envolvente ambiente. A mecânica é uma área que pode ser dividida em quatro outras grandes áreas de estudo, entre as quais a mecânica quântica, a mecânica relativista, a teoria quântica de campos e a mecânica clássica. A **mecânica clássica** - área em estudo neste capítulo - é a parte da mecânica convencional em que se estudam três grandes parâmetros - a cinemática, a dinâmica e a estática de uma partícula.

mecânica

mecânica clássica

Cinemática da partícula

Num primeiro passo do estudo da mecânica clássica é conveniente saber descrever o movimento em termos de espaço e tempo, ignorando a presença de outros agentes que causam esse movimento. Esta porção da mecânica é denominada de **cinemática**. Em várias situações nós podemos tratar o objeto em movimento como uma simples **partícula**, que em matemática é definida como um ponto que não tem definição de tamanho. Por exemplo, se nós quisermos descrever o movimento da Terra sobre o Sol, nós podemos dizer que a Terra é uma partícula e assim obter uma precisão algo razoável acerca da previsão da órbita da Terra. Esta aproximação deve-se ao facto do raio da órbita da Terra ser grande em comparação com as dimensões da Terra e do Sol. Também como exemplo, numa escala muito mais pequena, é possível explicar a pressão exercida por um gás nas paredes de um recipiente, tratando as moléculas do gás como partículas. Claramente a aproximação de partícula não funciona sempre, mas em geral, nós devemos frequentemente encontrar uma solução tanto válida como conveniente de tratar o objeto em movimento como uma partícula.

cinemática

partícula

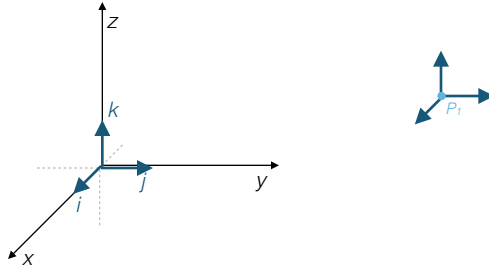
Posição e trajetória

De forma a podermos estabelecer a posição de uma partícula é sempre necessário considerar um **sistema de coordenadas**. O sistema de coordenadas mais

sistema de coordenadas

3 MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

simples de todos, dado que os vetores unitários (versores) em cada direção são independentes do ponto do espaço considerado, é o sistema de coordenadas **cartesiano**. Através deste sistema, com três dimensões espaciais, denotamos as coordenadas cartesianas por $\{x, y, z\}$ e os vetores unitários respectivos por $\{i, j, k\}$, como podemos ver na Figura 1.



cartesiano

figura 1 sistema cartesiano

Como podemos ver, se aplicarmos os vetores unitários no ponto P_1 obtemos na mesma o mesmo sistema de coordenadas, dado que os vetores unitários, da origem ao seu destino, são paralelos entre si, dois a dois.

A primeira quantidade cinemática fundamental é o **vetor posição**, r , de uma partícula pontual, a qual, num sistema cartesiano e num instante de tempo t é dada pela Equação 1.

$$\vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$$

equação 1 primeira quantidade cinemática fundamental: vetor posição magnitude

Por outro lado, através desta primeira quantidade cinemática fundamental que é o vetor posição, no instante de tempo t , também é possível obter o cálculo do parâmetro de **magnitude**, o qual se representa pela Equação 2.

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

equação 2 magnitude do vetor posição trajetória

Um outro parâmetro importante é a **trajetória**, que se traduz pelo lugar geométrico dos pontos ocupados pela partícula ao longo do tempo, como podemos ver através da análise de um competidor a correr no circuito de Suzuka representado na Figura 2.

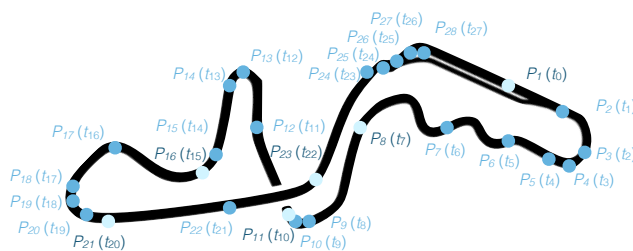


figura 2 trajetória de uma viatura num circuito

Deslocamento e distância percorrida

Tomemos para já, como exemplo, o circuito de Suzuka acima. Considerando a viatura em P_1 , no instante t_0 , quando esta se move uma certa distância entre o ponto onde se encontra e o ponto de onde partiu começa-se a criar. Dependendo da forma como a medirmos, quer seja seguindo a trajetória ou apenas medindo linearmente, medimos o deslocamento ou a distância percorrida da partícula, respetivamente. Em

suma, vejamos os dois conceitos de distâncias em comparação lado a lado, com exemplos ilustrativos.

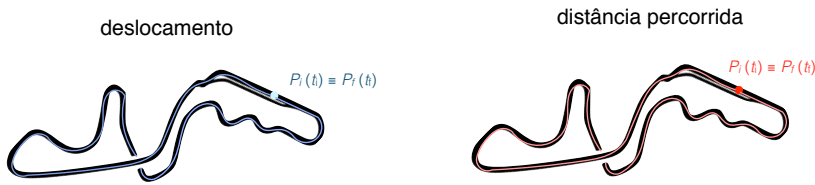


figura 3
diferença entre deslocamento e distância percorrida

Com estas ilustrações da Figura 3, vamos considerar que a viatura que circula iniciando a sua volta em P_i vai dar uma volta completa e parar em P_f que coincide com P_i . Se estivermos a medir a distância percorrida isto significa que vamos medir a distância de todo o percurso, desde o momento em que inicia o movimento até quando o finaliza. Sendo assim, no caso a distância percorrida 5,807 quilómetros. Já o deslocamento traduz-se linearmente pelo movimento entre a posição inicial e a posição final, ignorando qualquer trajetória realizada. Dado isto, estamos em condições de dizer que o deslocamento do veículo, no circuito de Suzuka, foi de 0 metros, porque deu a volta ao circuito e voltou ao mesmo sítio - se ignorarmos a trajetória o movimento foi nulo. O mesmo já não aconteceria se a viatura parasse a meio do circuito (Figura 4).

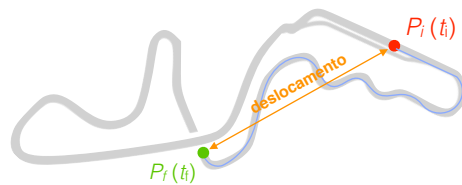


figura 4
deslocamento não nulo

De forma mais precisa, o **deslocamento**, designado convencionalmente por Δx , é o resultado da Equação 3.

$$\Delta x = x_f - x_i$$

deslocamento

equação 3
deslocamento

O deslocamento é uma quantidade vetorial, se bem que, por vezes, se denomine por deslocamento a quantidade escalar $|\Delta x|$.

A **distância percorrida**, designada por Δs , por sua vez, é a distância total que a partícula percorreu. Seja dr , com r sendo um vetor, um deslocamento infinitesimal. A distância percorrida pode ser escrita como na Equação 4 onde o integral é tomado ao longo de toda a trajetória desde x_i até x_f .

distância percorrida

$$\Delta s = \int_{\text{trajetória}} |d\vec{r}|$$

equação 4
distância percorrida

Em geral o deslocamento e a distância percorrida são coisas distintas, mas isso não acontece para um movimento retilíneo em que não há alteração do sentido do movimento, sendo que $\Delta s = |\Delta x|$.

Velocidade instantânea e média

Considerando um deslocamento Δx de uma partícula efetuado num intervalo de tempo Δt , temos que a **velocidade média** designada por $v_{m\u00e9dia}$ \u00e9 traduzida pela Equa\u00e7\u00e3o 5.

$$v_{m\u00e9dia} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_f - x_i}{t_f - t_i}$$

velocidade m\u00e9dia

equa\u00e7\u00e3o 5

velocidade m\u00e9dia

A velocidade m\u00e9dia \u00e9 o resultado da avalia\u00e7\u00e3o do estado da velocidade de uma dada part\u00edcula num dado intervalo de tempo. Acontece que n\u00e3o podemos usar este c\u00e1lculo para determinar a velocidade de uma part\u00edcula num determinado instante de tempo. Para tal existe a **velocidade instant\u00e2nea**. A velocidade instant\u00e2nea, v , \u00e9 igual ao limite do r\u00e1cio $\Delta x/\Delta t$ quando t tende para 0, como se mostra na Equa\u00e7\u00e3o 6.

velocidade instant\u00e2nea

$$v \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

equa\u00e7\u00e3o 6

velocidade instant\u00e2nea

Em notaa\u00e7\u00e3o de c\u00e1lculo, este limite \u00e9 chamado de derivada de x em t , escrevendo-se dx/dt , como na Equa\u00e7\u00e3o 7.

$$v \equiv \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{dx}{dt}$$

equa\u00e7\u00e3o 7

velocidade instant\u00e2nea como derivada de x em t

A velocidade instant\u00e2nea pode ser positiva, negativa ou nula. Quando o declive do gr\u00e1fico posi\u00e7\u00e3o-tempo \u00e9 positivo, v \u00e9 positiva. Se o declive for negativo, ent\u00e3o v tamb\u00e9m o ser\u00e1. Do mesmo modo, se o declive for nulo, v tamb\u00e9m o ser\u00e1.

O vetor velocidade \u00e9 sempre tangente \u00e0 trajet\u00f3ria - esta \u00e9 a segunda quantidade cinem\u00e1tica fundamental, que indica a raz\u00e3o da varia\u00e7\u00e3o no tempo do vetor posi\u00e7\u00e3o. Num sistema de coordenadas cartesianas a velocidade traduz-se pela Equa\u00e7\u00e3o 8.

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} \vec{i} + \frac{dy(t)}{dt} \vec{j} + \frac{dz(t)}{dt} \vec{k} \equiv v_x(t) \vec{i} + v_y(t) \vec{j} + v_z(t) \vec{k}$$

equa\u00e7\u00e3o 8

velocidade por coordenadas cartesianas

Por outro lado, a **magnitude do vetor velocidade**, no instante t , \u00e9 o representado na Equa\u00e7\u00e3o 9.

magnitude do vetor velocidade

$$|v(t)| = \sqrt{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2}$$

equa\u00e7\u00e3o 9

magnitude do vetor velocidade

Acelera\u00e7\u00e3o m\u00e9dia e instant\u00e2nea

\u00c9 ainda necess\u00e1rio introduzir uma terceira quantidade cinem\u00e1tica fundamental que nos indica a raz\u00e3o da varia\u00e7\u00e3o no tempo da velocidade - a **acelera\u00e7\u00e3o**.

acelera\u00e7\u00e3o

Consideremos um deslocamento Δx de uma part\u00edcula efetuado num intervalo de tempo Δt . Inicialmente a velocidade era v_i e no final a velocidade era v_f . Seja a varia\u00e7\u00e3o da velocidade denotada por Δv . Assim a Equa\u00e7\u00e3o 10 define acelera\u00e7\u00e3o m\u00e9dia.

$$a_{m\u00e9dia} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

equa\u00e7\u00e3o 10

acelera\u00e7\u00e3o m\u00e9dia

Tal como na velocidade temos velocidade instantânea, muitas vezes também é importante saber qual é a aceleração de uma partícula num dado instante t . Para tal definimos a **aceleração instantânea**, ou simplesmente aceleração, pela Equação 11.

$$a = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2}$$

Já num sistema de coordenadas, como o cartesiano, temos a Equação 12.

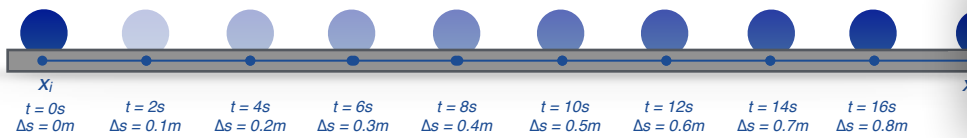
$$a(t) = \frac{d^2x(t)}{dt^2}\vec{i} + \frac{d^2y(t)}{dt^2}\vec{j} + \frac{d^2z(t)}{dt^2}\vec{k} = \frac{dv_x(t)}{dt}\vec{i} + \frac{dv_y(t)}{dt}\vec{j} + \frac{dv_z(t)}{dt}\vec{k} \equiv a_x(t)\vec{i} + a_y(t)\vec{j} + a_z(t)\vec{k}$$

A **magnitude do vetor aceleração**, no instante t , é o representado na Equação 13.

$$|a(t)| = \sqrt{a_x(t)^2 + a_y(t)^2 + a_z(t)^2}$$

Movimento retilíneo e uniforme

No décimo primeiro ano de escolaridade já foram estudados, na disciplina de Física e Química A, alguns movimentos uniformes, entre os quais, o movimento retilíneo e uniforme (MRU). Este movimento tem uma característica que é favorável ao início do estudo de mecânica - é unidimensional. Sendo assim, um movimento retilíneo uniforme pode ser encontrado, por exemplo, numa bola que circula numa calha, movendo-se do ponto x_i para o ponto x_f , como representa a Figura 5.



aceleração instantânea

equação 11
aceleração

equação 12
aceleração num sistema
cartesiano
magnitude do vetor
aceleração

equação 13
magnitude do vetor
aceleração

figura 5
movimento retilíneo
uniforme

Num movimento retilíneo uniforme a velocidade, dado que é constante - também em magnitude, para além da direção - significa que a aceleração é nula. Dado isto e desenvolvendo a Equação 7, obtemos a **lei do movimento retilíneo uniforme**, representado na Equação 14.

$$v_x = \text{constante} = \frac{dx(t)}{dt} \Rightarrow x(t) = \int v_x dt = v_x t + x_0,$$

onde x_0 é uma constante de integração - a posição no instante $t = 0$.

Mas, dado que a aceleração é constante, então da Equação 11, temos a Equação 15.

$$a_x = \text{constante} = \frac{dv_x(t)}{dt} \Rightarrow v_x(t) = \int a_x dt = a_x t + v_{x_0},$$

onde v_{x_0} é uma constante de integração - a velocidade no instante $t = 0$.

lei do movimento retilíneo
uniforme

equação 14
lei do movimento retilíneo
uniforme

equação 15
aceleração pela lei do
movimento retilíneo
uniforme

Por conseguinte, podemos concluir, através da Equação 14 e da Equação 15, a Equação 16.

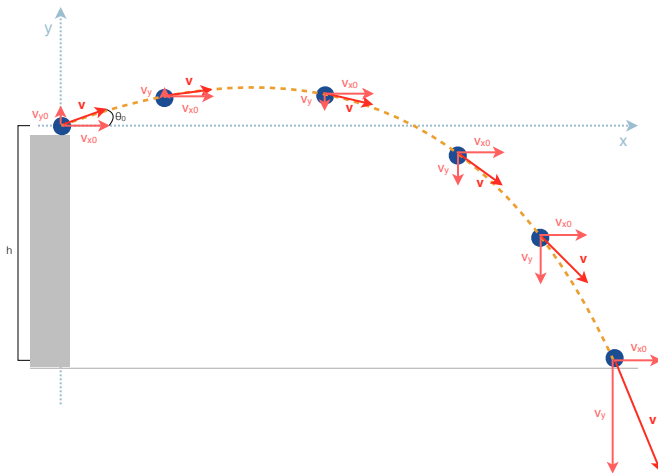
$$x(t) = \int v_x(t) dt = \int (a_x t + v_{x_0}) dt = \frac{a_x t^2}{2} + v_{x_0} t + x_0$$

Estas são as **leis do movimento retilíneo e uniformemente retardado/acelerado**. Resolvendo a Equação 15 em ordem a t e substituindo na Equação 16, obtemos a relação na Equação 17.

$$v_x^2 = v_{x_0}^2 + 2a_x(x - x_0)^1$$

Lançamento de projéteis

Quando estamos a ver um jogo de futebol ou um lançamento do martelo, estamos presentes a um lançamento de um projétil. Fazer a análise deste tipo de movimento é relativamente simples, tendo apenas dois aspetos em consideração: primeiro, o valor da aceleração g é constante ao longo de todo o movimento e tem direção para baixo; segundo, o efeito da resistência do ar é desprezado. Sendo assim, podemos verificar que a trajetória de um projétil é sempre uma **parábola**. Na Figura 6 temos um exemplo de um lançamento de um projétil genérico.



Como já foi referido anteriormente, a aceleração é tomada como um valor constante, com direção para baixo, sendo que o seu valor será $a = -g$. A partir deste ponto, sem contar com o interior das Equações listadas, os vetores serão representados a itálico e a negrito como o vetor \mathbf{u}_x .

Já sabemos que a aceleração tem o valor de $-g$, mas e a velocidade e a posição? A velocidade vetorial pode ser calculada através da primitivação da aceleração. Sabendo que $\mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt$, temos que $\mathbf{v} = -g.t.\mathbf{u}_y + \mathbf{c}$, como podemos ver na Equação 18.

$$\vec{v} = \int \vec{a} dt = -gt\vec{u}_y + \vec{c}, \quad \vec{v}(0) = \vec{v}_0 \Rightarrow \vec{c} = \vec{v}_0, \text{ logo}$$

$$\vec{v} = \vec{v}_0 - gt\vec{u}_y = v_0 \cos\theta \vec{u}_x + (v_0 \sin\theta - gt)\vec{u}_y$$

equação 16
desenvolvimento da eq.14 e eq.15

lei do movimento retilíneo e uniformemente retardado/acelerado

equação 17
leis do movimento retilíneo e uniformemente retardado/acelerado

parábola

figura 6
lançamento genérico de um projétil

equação 18
velocidade em lançamento de um projétil

¹ Mais à frente veremos que esta é uma forma do teorema trabalho-energia.

Já o vetor posição é análogo, mas diferente. Se para calcular a velocidade precisámos de primitivar a aceleração, para obter a posição primitivamos a velocidade. Assim, eis a Equação 19.

$$\vec{r} = \int \vec{v} dt = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \vec{u}_y = (x_0 + v_0 \cos \theta t) \vec{u}_x + \left(y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \right) \vec{u}_y$$

equação 19
posição em lançamento de um projétil

Dado isto, as nossas **equações paramétricas** refletem-se na Equação 20.

$$\begin{cases} x = x_0 + v_0 \cos \theta t \\ y = y_0 + v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

equações paramétricas

equação 20
equações paramétricas do lançamento de um projétil

As trajetórias dos lançamentos de projéteis, como já foi referido mais atrás, são sempre parabólicas. Se elas têm sempre esta característica então significa que são passíveis de serem facilmente analisadas matematicamente. Para tal, podemos tentar encontrar a equação da trajetória. A partir da Equação 20 temos que $x = x_0 + v_0 \cos \theta t$. Desenvolvendo em ordem a t , temos a Equação 21.

$$x = x_0 + v_0 \cos \theta t \therefore t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta}$$

equação 21
equação de x em ordem a t

Dada a Equação 21, e elaborando a substituição de t pela Equação 21, obtemos as seguintes novas equações paramétricas (Equação 22):

$$\begin{cases} t = \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \\ y = y_0 + v_0 \sin \theta \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2 \end{cases}$$

equação 22
equações paramétricas revisitadas

À equação em ordem a y , da Equação 22, dá-se o nome de **equação da trajetória**.

$$y = y_0 + v_0 \sin \theta \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2$$

equação da trajetória
equação 23
equação da trajetória

Ao desenharmos e analisarmos a trajetória num gráfico como o exposto na Figura 6, existem alguns pontos que têm bastante interesse para definirmos o movimento em estudo: o alcance e a altura máxima. Começemos com o alcance. O **alcance** significa a distância máxima que o projétil percorre ao longo do eixo dos xx (projeção no x) até que o valor de y seja 0. Na Figura 7 está uma representação do conceito de alcance. Mas como é que podemos medir o alcance de um projétil?

alcance

Até agora estudámos as equações paramétricas do lançamento de um projétil, das quais conseguimos desvendar a equação da trajetória do projétil. Dado que o alcance se designou como a distância que o projétil percorre até que o valor de y seja

9 MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

0, para calcular o alcance, devemos igualar a nossa equação da trajetória a 0 e verificar a expressão genérica para o cálculo do alcance.

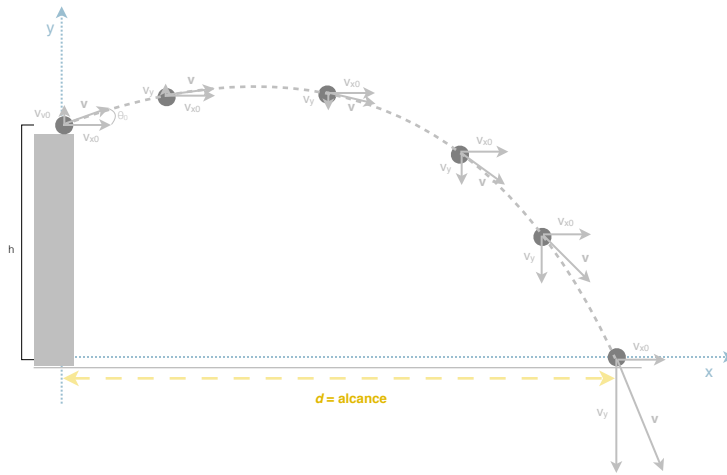


figura 7
alcance

!! Nota na Figura 7 o eixo dos xx está orientado pelo centro de massa do projétil quando termina o movimento em estudo, ao contrário da Figura 6. **nota**

Para fazer então o cálculo do alcance temos a Equação 24.

$$0 = y_0 + v_0 \sin \theta \frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} - \frac{1}{2} g \left(\frac{x - x_0}{v_0 \cos \theta} \right)^2 = y_0 + \tan \theta d - \frac{1}{2} g \left(\frac{d^2}{v_0^2 \cos^2 \theta} \right)$$

equação 24
cálculo do alcance
(desenvolvimento)

como é quadrática, avaliamos d :

$$d = \frac{-\tan \theta \pm \sqrt{\tan^2 \theta + 4 \times \frac{1}{2} \times g \times \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \theta} \times y_0}}{-2 \times \frac{1}{2} \times g \times \frac{1}{v_0^2 \cos^2 \theta}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d = \frac{\tan \theta + \sqrt{\tan^2 \theta + \frac{2 \times g \times y_0}{v_0^2 \cos^2 \theta}}}{\frac{1}{v_0^2 \cos^2 \theta}}$$

Por um caso específico, se $y_0 = 0$, temos a Equação 25:

$$d = \frac{2 \tan \theta}{\frac{g}{v_0^2 \cos^2 \theta}} = \frac{2 \sin \theta \cos \theta v_0^2}{g} = \frac{\sin(2\theta) \times v_0^2}{g}$$

equação 25
cálculo do alcance
(caso particular com
 $y_0 = 0$)

A **altura máxima** é o valor de y máximo do gráfico da trajetória. Sendo assim, e por análise cinemática, temos que a altura máxima corresponde a quando a velocidade é nula (vértice da parábola). Sendo assim, no vértice da parábola da

altura máxima

trajetória, temos que a derivada no ponto é igual a 0. Nesse mesmo ponto, quando a partícula se encontra aí, ela encontra-se com a projeção do vetor velocidade no eixo dos yy com módulo igual a 0. Pelo cálculo da velocidade vetorial, temos a Equação 26.

$$\begin{cases} v_y = 0 \\ v_y = v_0 \sin \theta - gt \Rightarrow t_h = \frac{v_0 \sin \theta}{g} \end{cases}$$

equação 26
parametrização da altura máxima

Relembrando as equações paramétricas a altura máxima $h_{max} = y - y_0$. Substituindo y pelo y das paramétricas temos a Equação 27.

$$h_{max} = y_0 + v_0 \sin \theta t_h - \frac{1}{2} g t_h^2 - y_0 = v_0 \sin \theta t_h - \frac{1}{2} g t_h^2$$

equação 27
desenvolvimento da equação paramétrica em y

Substituindo agora t_h pelo t_h da Equação 26 temos a Equação 28.

$$h_{max} = v_0 \sin \theta \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right) - \frac{1}{2} g \left(\frac{v_0 \sin \theta}{g} \right)^2 = \sin^2 \theta \frac{v_0^2}{g} - \frac{1}{2} g \times \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g^2} = \frac{1}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g}$$

equação 28
desenvolvimento da altura máxima

Sintetizando eis as expressões do alcance e a da altura máxima na Equação 29.

- alcance (geral): $d = \frac{\tan \theta + \sqrt{\tan^2 \theta + \frac{2 \times g \times y_0}{v_0^2 \cos^2 \theta}}}{\frac{1}{v^2 \cos^2 \theta}}$

- alcance (quando $y_0 = 0$): $d = \frac{\sin(2\theta) \times v_0^2}{g}$

- altura máxima: $h_{max} = \frac{1}{2} \times \frac{v_0^2 \sin^2 \theta}{g}$

equação 29
síntese do alcance e da altura máxima

O movimento do lançamento de projéteis já está prestes a concluir, mas ainda não se encontra, de todo, terminado. Ainda não estudámos muito uma variável muito importante e não-desprezável: o tempo. Aqui o que nos interessa estudar é o **tempo de voo**, isto é, o tempo em que o projétil demora a percorrer o espaço até atingir o seu alcance. Matematicamente falando, dada a trajetória traçada numa parábola, pretende-se saber para que t_{voo} é que o $y = 0$. Sendo assim voltamos à equação y das paramétricas e substituímos t por t_{voo} . Ao resolver a equação do segundo grau em ordem a t_{voo} temos que procurar uma solução não-negativa e não-nula. Vejamos o desenvolvimento na Equação 30.

tempo de voo

Isto foi a análise de um lançamento de um projétil. Nesta disciplina propõe-se a realização de um trabalho prático acerca deste mesmo tema, sendo que, como anexo, podes encontrar uma explicação de uma proposta de trabalho, com exercícios e as respetivas propostas de solução. Neste pequeno tema é necessário, mais-que-tudo, saber integrar bem os conceitos-base como as noções de cinemática básica

(deslocamento, velocidade e aceleração) com as equações paramétricas do movimento do lançamento de um projétil.

$$0 = y_0 + v_0 \sin \theta \times t_{\text{voo}} - \frac{1}{2} g \times t_{\text{voo}}^2$$

$$t_{\text{voo}} = \frac{-v_0 \sin \theta \pm \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 4 \times y_0 \times \frac{1}{2} \times g^2}}{-2 \times \frac{1}{2} \times g}$$

$$\text{solução positiva: } t_{\text{voo}} = \frac{v_0 \sin \theta + \sqrt{v_0^2 \sin^2 \theta + 2 y_0 g^2}}{g}$$

equação 30
tempo de voo
(desenvolvimento)

Movimento Curvilíneo

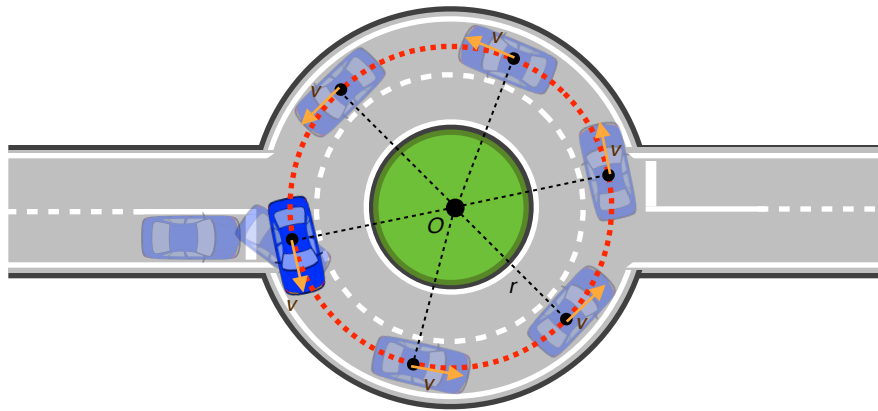


figura 8
movimento circular uniforme

Na Figura 8 podemos ver um carro a executar um movimento numa trajetória circular com uma velocidade constante v . A este movimento damos o nome de **movimento circular uniforme**, o qual ocorre em variadas situações. Por ocorrer tão frequentemente, este tipo de movimento é reconhecido num modelo de análise denominado de partícula em movimento circular uniforme.

Como já foi referido, este movimento caracteriza-se pela trajetória circular e principalmente pela velocidade constante. Mas o facto de caracterizarmos a velocidade como constante não significa que não haja aceleração. Para perceber o porquê, consideremos a Equação 11 como definição de aceleração. Note-se que a aceleração depende da variação da velocidade. Dado que a velocidade é um vetor quantidade, a aceleração pode ocorrer de duas formas: através de uma mudança na magnitude da velocidade ou através de uma mudança de direção da velocidade. O que aqui acontece, sendo que a partícula se move numa trajetória circular, é a constante mudança de direção, que resulta na criação de aceleração, a uma velocidade constante. Assim, o vetor velocidade é sempre tangente à trajetória da partícula e perpendicular ao raio da mesma.

Agora podemos dizer que o vetor aceleração num movimento circular uniforme é sempre perpendicular à trajetória com sentido sempre orientado para o centro do círculo. Se isso não se comprovar, então uma componente da aceleração é paralela à

movimento circular uniforme

trajetória e, conseqüentemente, paralela ao vetor velocidade. Tal componente da aceleração iria provocar uma mudança na rapidez da partícula ao longo da trajetória. Esta situação, contudo, é inconsistente com as nossas considerações iniciais, pelo que definimos *a priori* que a partícula move-se numa velocidade constante. No entanto, no movimento circular uniforme, o vetor aceleração só pode ter uma componente perpendicular à trajetória, que é a que tem sentido para o centro da circunferência, como se pode ver na Figura 9.

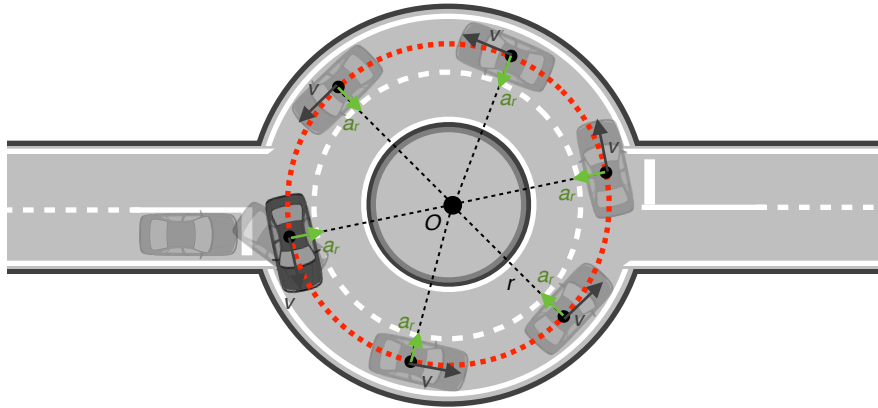


figura 9
componente da aceleração
em m.c.u.

Agora vamos determinar a magnitude da aceleração da partícula - no caso da Figura 9, do carro. Consideremos a Figura 10, que representa a variação de posição Δr para um intervalo de tempo arbitrário. A partícula segue uma trajetória circular de raio r , parte da qual está visível através do traço interrompido. A partícula encontra-se em A no instante t_i , e a sua velocidade instantânea é v_i ; a partícula encontra-se em B no instante t_f , e a sua velocidade instantânea é v_f . Assumamos também que v_i e v_f diferem apenas na direção, logo, que as suas magnitudes, isto é $v_i = v_f = v$, porque estamos perante o estudo do movimento circular uniforme.

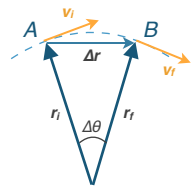


figura 10
diagrama dos vetores posição
e velocidade

Já na Figura 11, os vetores velocidade da Figura 10 foram redesenhados, sendo que coincidem as origens. O vetor v coneta as pontas dos vetores, de forma a representar o vetor soma de $v_f = v_i + \Delta v$. Em ambas as figuras podemos ver triângulos que nos vão, concerteza, ajudar na análise do movimento. O ângulo $\Delta\theta$ entre os dois vetores posição na Figura 10 é o mesmo que entre os dois vetores de velocidade da Figura 11, porque o vetor velocidade v é sempre perpendicular ao vetor posição r . No entanto, os dois triângulos são semelhantes (dois triângulos são semelhantes se o ângulo entre quaisquer dois lados é igual em ambos os triângulos e se houver proporção entre os comprimentos dos lados dos triângulos). Nós agora podemos escrever a relação entre os comprimentos dos lados dos dois triângulos da Figura 10 e da Figura 11, na Equação 31, onde $v = v_i = v_f$ e $r = r_i = r_f$.

$$\frac{|\Delta \vec{v}|}{v} = \frac{|\Delta \vec{r}|}{r}$$

equação 31
relação entre os
comprimentos dos
lados dos triângulos

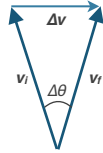


figura 11
diagrama dos vetores
velocidade inicial e final

A Equação 31 pode ser resolvida por $|\Delta \mathbf{v}|$, e a expressão obtida pode ser substituída pela Equação 10, da aceleração média, de forma a calcular a magnitude da aceleração média sobre o intervalo de tempo da partícula no movimento entre o ponto A e B , que se pode ver na Equação 32.

$$|\vec{a}_{\text{média}}| = \frac{|\Delta \vec{v}|}{|\Delta t|} = \frac{v|\Delta \vec{r}|}{r \Delta t}$$

equação 32
aceleração média revisitada

Agora imaginemos que os pontos A e B da Figura 10 se tornam muito próximos um do outro. Enquanto A e B se aproximam um do outro o intervalo de tempo Δt aproxima-se também de 0, $|\Delta \mathbf{r}|$ aproxima-se da distância percorrida pela partícula ao longo do movimento circular e o quociente $|\Delta \mathbf{r}|/\Delta t$ aproxima-se da velocidade v . Mais, a aceleração média torna-se a aceleração instantânea no ponto A . Sendo assim, no limite de Δt quando tende para 0, a magnitude da aceleração é apresentada pela Equação 33.

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

equação 33
aceleração centrípeta

A uma aceleração deste tipo dá-se o nome de **aceleração centrípeta**, isto é, uma aceleração que tem direção radial com sentido para o centro, representada por um a_c . Esta aceleração também é denominada de **aceleração normal**, dado que perfaz sempre um ângulo de 90° com o vetor velocidade, tangente à trajetória.

aceleração centrípeta
aceleração normal

Em muitas situações é conveniente descrever um movimento de uma partícula que se move numa velocidade constante numa circunferência de raio r em termos de um **período** T . O período é definido como o intervalo de tempo necessário para que seja cumprida uma revolução total da partícula. Dado que estamos a estudar o movimento circular uniforme, a partícula movimenta-se numa distância de $2\pi r$ (perímetro de uma circunferência). No entanto, dado que a sua velocidade é igual ao perímetro da trajetória circular a dividir pelo período, isto é, $v = 2\pi r / T$, temos a Equação 34.

período

$$T = \frac{2\pi r}{v}$$

equação 34
período

O **período num movimento circular**, de uma partícula, é o cálculo do número de segundos por cada revolução da circunferência. O inverso do período é a **frequência** de rotação e é medida em revoluções por segundo. Dado que uma revolução completa da partícula corresponde a um ângulo de 2π radianos, o produto de 2π radianos e a frequência dão-nos a **velocidade angular**, representada na Equação 35, sendo que se denomina pela letra minúscula ω , e é medida em radianos por segundo (rad/s) ou s^{-1} .

período num movimento circular, frequência
velocidade circular

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

equação 35
velocidade angular

Ao combinarmos a Equação 35 com a Equação 34 temos a Equação 36, na qual encontramos uma relação entre a velocidade angular e a velocidade de translação com a qual a partícula se move num movimento circular.

$$\omega = 2\pi \left(\frac{v}{2\pi r} \right) = \frac{v}{r} \rightarrow v = r\omega$$

equação 36
velocidade angular revisitada

A Equação 36 mostra que, para uma velocidade angular fixa, a velocidade de translação torna-se maior quanto maior for o raio da circunferência. Por exemplo, se um carrossel gira a uma velocidade angular fixa ω , um sujeito que anda na parte mais exterior do carrossel (circunferência com raio r grande) movimenta-se no espaço mais rápido que um outro sujeito que anda na parte mais interior do carrossel (circunferência de raio r pequeno). Nós podemos assim, visitar a Equação 33, combinando-a com a Equação 36 tendo a Equação 37:

$$a_c = \frac{(r\omega)^2}{r} = r\omega^2$$

equação 37
aceleração centrípeta
revisitada

Aceleração tangencial e normal

Consideremos um movimento circular mais generalizado que o estudado na secção anterior (§§Movimento curvilíneo). Consideremos assim uma partícula que se move ao longo de uma trajetória curvilínea e cuja velocidade muda tanto em módulo como em direção. Nesta situação, e tal como estudado anteriormente, o vetor velocidade mantém-se sempre tangente à trajetória, no entanto, o vetor aceleração \mathbf{a} tem um dado ângulo da trajetória. Em cada um dos três pontos da Figura 12, A , B ou C , as circunferências desenhadas a azul claro e traço interrompido representam a curvatura da trajetória em cada um dos pontos. O raio de cada circunferência é igual ao raio da curvatura em cada ponto.

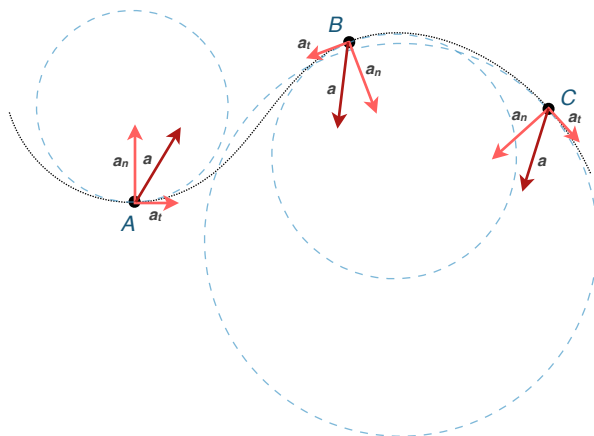


figura 12
movimento curvilíneo geral

Enquanto a partícula se move ao longo da trajetória curvilínea a direção do vetor total da aceleração \mathbf{a} muda de ponto para ponto. Em qualquer instante, este

vetor pode ser decomposto em duas componentes baseados na origem do centro da circunferência a que corresponde esse instante: uma componente normal (ou radial) a_n , ao longo do raio da circunferência e uma componente tangencial a_t , tangente à circunferência, logo, perpendicular ao raio. Assim, o vetor aceleração total \mathbf{a} pode ser escrito como a soma de dois outros vetores, como na Equação 38.

$$\vec{a} = \vec{a}_n + \vec{a}_t$$

equação 38
aceleração decomposta

A **aceleração tangencial** provoca uma alteração na velocidade v da partícula. Esta componente é paralela à velocidade instantânea, sendo que a sua magnitude é dada pela Equação 39.

$$a_t = \left| \frac{dv}{dt} \right|$$

equação 39
aceleração tangencial

Por outro lado, a **aceleração normal** (ou radial) provém de uma mudança de direção por parte do vetor velocidade, pelo que é dada pela Equação 40.

$$a_n = -a_c = -\frac{v^2}{r}$$

aceleração normal

equação 40
aceleração normal

nota!! na Equação 40, r é o raio da curvatura da trajetória no ponto em estudo.

nota

Nós podemos reconhecer a magnitude da componente aceleração normal como a aceleração centrípeta estudada na secção anterior, lembrando o estudo do movimento circular uniforme. Mesmo em situações em que a partícula se move numa trajetória curvilínea com uma velocidade variável a Equação 33 pode ser usada como cálculo para a aceleração centrípeta. Nesta situação, a equação dá-nos a aceleração centrípeta instantânea em qualquer instante. O sinal negativo na Equação 40 indica que a direção da aceleração centrípeta é em torno do centro da circunferência, representando o raio de curvatura.

Como \mathbf{a}_n e \mathbf{a}_t são componentes perpendiculares de \mathbf{a} , segue-se que a magnitude de \mathbf{a} é igual à Equação 41.

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$$

equação 41
módulo da aceleração total

Numa dada velocidade v , a_n é grande quando o raio r é pequeno (pontos A e B da Figura 12) e pequena quando o raio r é grande (ponto C da Figura 12). A direção de \mathbf{a}_t é a mesma que a do vetor \mathbf{v} (se v aumentar) ou oposta a \mathbf{v} (se v diminuir, como no ponto B).

Conceptualização de força

Toda a gente tem uma ideia básica do que é uma **força**. Quando jogamos futebol estamos a exercer forças sobre a bola de forma a que possamos jogar. Neste exemplo a palavra força refere-se a uma interação com um objeto por meios de uma atividade muscular e alguma mudança na velocidade do objeto. As forças nem sempre causam movimento! Por exemplo, quando estamos sentados, a força gravitacional atua no nosso corpo e mesmo assim permanecemos quietos.

força

Então mas que forças existem no Universo? Podemos caracterizar as forças em dois grandes grupos: **forças à distância** e **forças de contacto**. Como forças de contacto, temos a tensão, o atrito, a impulsão e a força elástica. Por outro lado, como forças à distância temos como exemplos a força gravítica, a força elétrica, força magnética e as forças nucleares. Ao longo do nosso estudo vamos elaborando concretizações destas forças.

força à distância, força de contacto

Leis de Newton

Para começar o nosso estudo acerca das Leis de Newton, que são três, consideremos um disco do jogo de Air Hockey no topo do tabuleiro do respetivo jogo. Num recorte longitudinal do tabuleiro, temos a seguinte perspetiva, visível na Figura 13.

© Isaac Newton

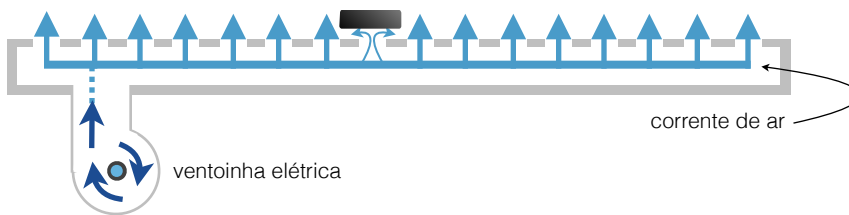


figura 13
mesa de air hockey cortada

Quando pomos o sistema da Figura 13 em funcionamento, com o disco posicionado naquela posição, sem qualquer efeito de outras interações externas, nós podemos esperar que o disco permaneça inanimado no topo da mesa. Agora imaginemos que a mesa de air hockey está num comboio que se move a uma velocidade constante em carris perfeitamente suaves e lisos. Se o disco estiver quieto sobre a mesa ele manter-se-á durante todo o percurso. Mas se o comboio começar a acelerar, no entanto, o disco começar-se-á a mover ao longo da mesa na direção oposta da aceleração do comboio. Um objeto em movimento pode ser observado sobre vários pontos de referência. Dado isto introduzimos a **primeira lei de Newton**, também chamada de **lei da inércia**, a qual define um conjunto de pontos de referência chamados de pontos inerciais. Assim, a primeira lei de Newton pode ser enunciada da seguinte forma: se um objeto não interage com outros objetos, é possível identificar um ponto inercial no qual o objeto tem aceleração nula.

**primeira lei de Newton
lei da inércia**

Uma outra forma de enunciar a primeira lei de Newton é dizendo que na ausência de forças externas e quando observado de um sistema referencial inercial um objeto em repouso permanece em repouso e um objeto em movimento prossegue em movimento com velocidade constante (isto é, em movimento retilíneo uniforme). Por outras palavras, quando nenhuma força atua sobre um corpo, a aceleração deste é zero.

Pela primeira lei de Newton concluímos que qualquer objeto isolado (desde que não interaja com a sua envolvente) tanto pode estar em repouso como em movimento com velocidade constante. À tendência de um objeto resistir a qualquer mudança súbita de velocidade damos o nome de **inércia**.

inércia

Como vimos as leis de Newton são três, e até ao momento só estudámos uma. Estudemos agora a segunda lei de Newton.

Na nossa discussão acerca da primeira lei de Newton vimos que quando sobre um corpo não atua qualquer força ele move-se com velocidade constante e aceleração nula. Imaginemos um disco de hóquei (um *puck*) que está a deslizar com sentido para a direita no gelo, onde consideramos não ter atrito. Não existem qualquer forças horizontais a atuar sobre o disco. O somatório das forças verticais gravitacional e normal é igual a zero, pelo que a **força resultante** que atua no *puck* é igual a zero, tal

força resultante

como a aceleração do objeto (aceleração igual a zero), tendo a velocidade dada como constante. Mas o que é que acontece quando a força resultante não é igual a zero?



figura 14
força a atuar num corpo

Na Figura 14 nós aplicamos uma nova força, constante, de forma horizontal, para que possamos avaliar a reação da partícula à perturbação proposta na última questão. Em comparação à primeira lei de Newton, na qual se explica o que acontece a um objeto quando quaisquer forças atuam sobre ele, a segunda lei de Newton, vai-nos ajudar a compreender o que acontece a um objeto quando uma força atua nesse objeto. No caso da Figura 14, quando aplicamos uma força F no *puck*, este move-se com uma dada aceleração a . Se aplicarmos uma força duas vezes maior no mesmo *puck*, por via experimental, verifica-se que o valor da aceleração duplica também. Se continuarmos a aumentar o módulo da força para o triplo da primeira vez, verifica-se que, proporcionalmente, a aceleração também terá o triplo do módulo. Concluímos assim que a aceleração de um objeto é diretamente proporcional à força que atua no objeto, como se pode verificar na Equação 42.

$$\vec{F} \propto \vec{a}$$

equação 42
proporcionalidade direta
entre força e aceleração
segunda lei de Newton

Em suma, a **segunda lei de Newton** diz-nos que quando observado de um referencial inercial, a aceleração de um objeto é diretamente proporcional ao somatório das forças que nele atuam e inversamente proporcional à sua massa, pelo que se escolhermos uma constante de proporcionalidade de 1, temos a Equação 43.

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

equação 43
segunda lei de Newton

nota!! Na Equação 43 $m \cdot a$ não é uma força! Todas as forças que atuam num objeto são somadas vetorialmente de forma a que seja representado como o somatório de F na Equação 43. Esta força resultante é então equacionada de forma a que resulte do produto entre a massa do objeto e a sua aceleração.

nota

A Equação 43 reflete uma expressão vetorial, que pode ser decomposta em várias outras expressões, consoante os diversos seus componentes.

$$\sum F_x = ma_x$$

$$\sum F_y = ma_y$$

$$\sum F_z = ma_z$$

equação 44
componente em x

equação 45
componente em y

equação 46
componente em z

A unidade de força no Sistema Internacional de Medidas (SI) é o **Newton**, representado pela letra N. A força de 1 N é a força que, quando atua num corpo de massa 1 kg, produz uma aceleração de 1 m.s⁻². Pela definição da segunda lei de Newton, podemos criar uma expressão que a reflita, mas através das unidades de massa, distância e tempo, como a Equação 47.

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

Newton

equação 47
segunda lei de Newton em
unidades

Dado que já estudámos as duas primeiras leis de Newton, só nos falta uma - a terceira lei. Se nós pegarmos numa caneta que tenha um pequeno botão no topo para a abrir e a pretendermos abrir, quando premimos o botão ficamos com uma pequena marca no nosso dedo. Se entretanto a caneta não abrir e se nós fizermos ainda mais força, a marca no nosso dedo fica cada vez maior. Mas porque é que isto acontece? A explicação a acontecimentos como este foi objeto de estudo de Newton, que desenvolveu uma teoria que rapidamente provou por via experimental e por via indireta. Assim nasce a **terceira lei de Newton**, a qual afirma que se dois corpos interagem entre si, a força exercida no corpo A pelo corpo B é igual e tem sentido oposto à força exercida no corpo B pelo corpo A . A equação que demonstra esta tese está explícita na Equação 48.

terceira lei de Newton

$$F_{AB} = -F_{BA}$$

equação 48

terceira lei de Newton

nota!! Note-se que na Equação 48 quando se escreve F_{AB} tenciona-se representar a força que o corpo A exerce sobre o corpo B .

nota

Como corolário desta lei temos que as forças ocorrem sempre aos pares e que uma força isolada nunca é passível de existir. A este efeito dá-se o nome de **pares ação-reação**. A Figura 15 tenciona representar a aplicação da terceira lei de Newton a dois corpos, sendo que o computador se faz representar pelo corpo A e a mesa pelo corpo B .

pares ação-reação

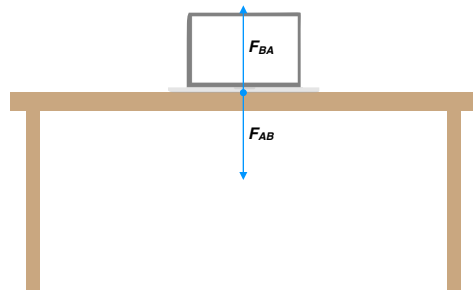


figura 15

terceira lei de Newton

Forças de Atrito

Quando um corpo se encontra em movimento, quer numa superfície ou através de um meio algo viscoso como o ar ou a água, existe **resistência** ao movimento, dado que o corpo interage com a sua envolvente. A esta resistência damos o nome de **forças de atrito**. Estas forças são muito importantes no nosso dia-a-dia, pois elas permitem-nos correr, andar e porque são necessárias para que os nossos automóveis possam concretizar movimento.

resistência

forças de atrito

Consideremos um bloco num plano horizontal. Se nós aplicarmos uma força horizontal externa F no bloco, com sentido para a direita, o bloco permanecerá em repouso caso o módulo de F não seja suficientemente grande. A força que contraria F e provoca que o bloco permaneça parado é chamada de **força de atrito**, a qual representaremos por f_a . O que podemos analisar até ao momento é que até que o bloco não se mova $f_a = F$. Sendo que o bloco está em repouso, chamamos a este tipo de força de atrito, **força de atrito estático**, representada por f_s .² Se exercermos mais força

força de atrito

força de atrito estático

² Por via experimental revela-se que este tipo de força é causada pelo nível de rugosidade da superfície onde o corpo tenta exercer movimento. Mesmo que a superfície pareça muito suave, a nível atómico as moléculas provavelmente têm uma reação repelente, pelo que causa uma força de atrito que pode ser razoável.

sobre o bloco, aumentando o valor do módulo de F , o bloco eventualmente ultrapassará esta primeira barreira de atrito. Quando o corpo está mesmo prestes a passar essa barreira, f_s está com a sua magnitude máxima. A partir do momento em que a força exercida ultrapassa este máximo, o bloco move-se e acelera para a direita. A partir do momento em que o bloco se encontra em movimento, a força de atrito que retarda o movimento é menor ao máximo da primeira barreira. A força que se caracteriza por existir logo após a primeira barreira de atrito (atrito estático) dá-se o nome de **força de atrito cinético**, e representa-se por f_c , sendo que em inglês se representa por f_k , forma passível de ser usada aquando de movimentos curvilíneos, de forma a que a representação de f_c não se confunda com a representação de força centrípeta. Se a partir do momento em que o corpo ultrapassa a primeira barreira de atrito a magnitude de $F = f_c$ o bloco mover-se-á para a direita com velocidade constante. Na Figura 16 podemos verificar uma representação gráfica deste exemplo de aplicação, juntamente com um gráfico que demonstra a magnitude da força exercida sobre o corpo.

força de atrito cinético

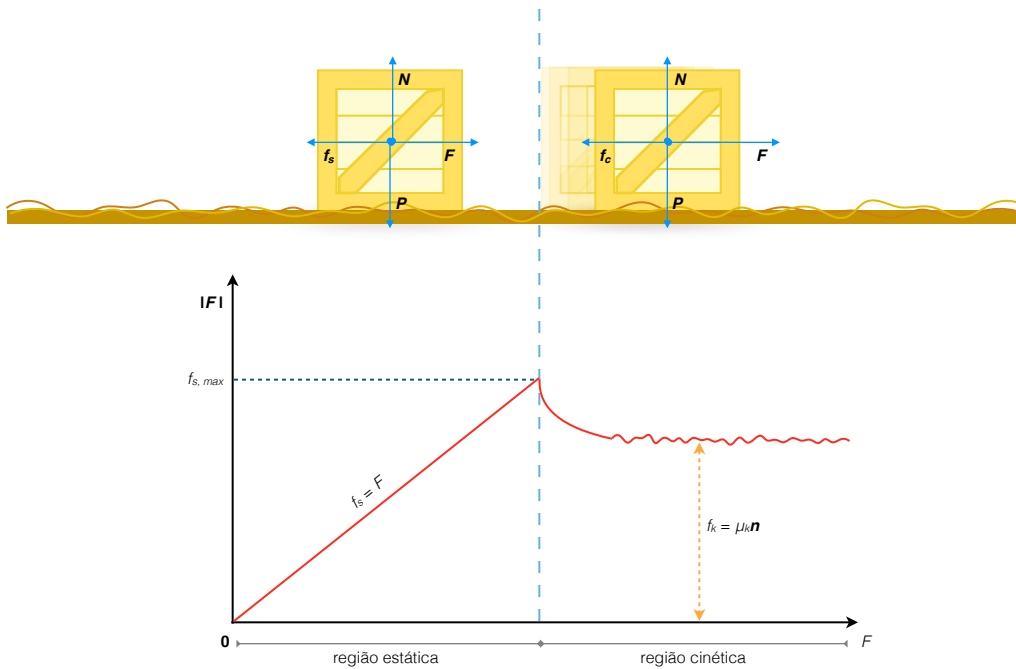


figura 16
atrito estático e atrito cinético

Experimentalmente, numa aproximação bastante boa, temos que, tanto f_{max} , como f_c são proporcionais à força normal que atua no bloco. As observações experimentais podem ser então sumariadas pelas seguintes leis empíricas do atrito: a direção da força de atrito estático entre duas superfícies em contacto é oposta à direção de qualquer outra força aplicada e pode ter valores do tipo da Equação 49, onde a constante adimensional μ_s é denominada de **coeficiente de atrito estático** e n é a magnitude da força normal. A igualdade na Equação 49 é possível quando o bloco está perto de cruzar a primeira barreira de atrito, isto é, quando $f_s = f_{max} = \mu_s n$;

coeficiente de atrito estático

$$f_s \leq \mu_s n$$

equação 49
atrito estático

A direção da força de atrito cinético que atua sobre um objeto é oposta à direção do seu próprio movimento, a qual é dada pela Equação 50, onde μ_c é o **coeficiente de atrito cinético**;

$$f_c = \mu_c n$$

coeficiente de atrito cinético
equação 50
atrito cinético

Os valores de μ_s e de μ_c dependem da natureza das superfícies, embora μ_c seja, geralmente, menor que μ_s . Os valores típicos de μ variam entre 0.05 e 1.5; Os coeficientes de atrito são quase independentes da área de contacto entre as superfícies.

Energia de um sistema

As definições de quantidades como posição, velocidade, aceleração e força, e princípios a si associadas como a segunda lei de Newton, permitiram-nos resolver grande parte dos nossos problemas. No entanto, alguns dos problemas que nós conseguimos resolver teoricamente com as leis de Newton, são difíceis de resolver na prática, embora possam ser simplificados e resolvidos dando azo a possíveis aproximações. Nas secções seguintes vamos dar algum tempo para o estudo desta nova abordagem aos problemas, o que pode incluir definições de quantidades com as quais ainda não estamos familiarizados. Algumas quantidades podem-nos soar familiares, mas há que destacar que muito possivelmente elas terão significados mais específicos na física, do que no nosso dia-a-dia. Assim, comecemos por discutir o significado da noção de **energia**.

energia

O conceito de energia é um dos tópicos mais importantes em todo o contexto científico e de engenharia. No nosso dia-a-dia a energia tem um papel relacionado com combustível para transportes e calor, eletricidade para luzes e outras aplicações, entre outros... Estas ideias, no entanto, não definem energia - apenas destacam que combustíveis são necessários para fazer um dado trabalho, fornecendo-nos algo a que chamamos de energia.

A energia está presente no Universo nas mais variadas formas. Todos os processos físicos que ocorrem no Universo envolvem energia e suas transferências e transformações. Infelizmente, embora a sua extrema importância, a energia não é facilmente definida. As variáveis que estudámos até ao momento são relativamente concretas - agora estudamos a noção de energia, a qual será muito mais abstrata.

Através de um novo conceito, vamos estudar a noção de energia aos poucos. O conceito que nos servirá de base para esta nossa nova abordagem é o de **sistema**. Um sistema pode ser:

sistema

- um objeto individual ou uma partícula;
- um conjunto de objetos ou partículas;
- uma região do espaço (como o interior de um cilindro de combustão de um motor automóvel);
- um sistema que pode variar no tempo em tamanho e forma (como uma bola de plasticina, que se deforma quando colide com uma parede).

Em oposição ao modelo de partículas estudado antes, a busca pela consideração de um dado sistema para a resolução de um problema é um passo muito importante. Assim, qualquer que seja o sistema particular num dado problema, nós devemos identificar uma fronteira entre o sistema em si e a sua envolvente. Por exemplo, consideremos uma força aplicada a um objeto no vazio. Neste caso podemos considerar o objeto como o sistema e a sua superfície como a sua envolvente. A força aplicada ao corpo é uma interação da envolvente com o sistema em si.

Trabalho realizado por uma força constante

Grande parte dos termos que já usamos antes - como velocidade, posição, aceleração, força, entre outros... - têm um significado físico muito próximo do significado que lhes atribuímos no quotidiano. Agora, vamos estudar um termo que, ao contrário dessa grande parte dos termos, tem um significado longe da linearidade do nosso quotidiano - falamos de trabalho.

De forma a perceber o que trabalho como uma influência num sistema significa para um físico, consideremos a seguinte situação, ilustrada na Figura 17.

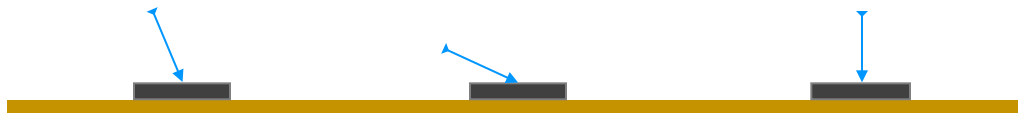


figura 17
trabalho por blocos

Uma força \mathbf{F} é aplicada ao bloco cinzento da Figura 17, o qual identificamos como o nosso sistema, o que faz com que o bloco se mova ao longo da superfície castanha. Se nós quisermos saber o quão importante é a força que gera movimento no bloco, nós devemos considerar não só a magnitude da força, mas também a sua direção. Note-se que na Figura 17, nos três casos, a força tem o mesmo módulo, mas direções diferentes. Assumindo que a magnitude da força aplicada é igual nos três casos acima expostos, a força aplicada no caso do meio gera mais movimento que a força aplicada no caso da esquerda. Por outro lado, o caso da direita mostra-nos uma situação na qual a força aplicada não perfaz qualquer tipo de movimento, por muito grande que o seu módulo seja. Estes resultados sugerem que quando analisamos forças de forma a determinar a sua influência no sistema, é importante considerar a natureza vetorial da força. Também temos de considerar a magnitude da força. Movendo uma força com uma magnitude de $|\mathbf{F}| = 2 \text{ N}$ através de um deslocamento x representa maior influência da força num sistema que mover uma força de magnitude 1 N através do mesmo deslocamento x . Assim, já estamos em condições perfeitas para resolvermos o conceito de trabalho.

O **trabalho** exercido num sistema por um agente exercendo uma força constante no sistema, W , é o produto da magnitude de \mathbf{F} (força), da magnitude Δx (deslocamento) e $\cos(\theta)$, no qual θ é o ângulo entre o vetor da força e de deslocamento (Equação 51).

trabalho

$$W = F \cdot \Delta x \cdot \cos \theta$$

equação 51
trabalho

As unidades do trabalho são aquelas que multiplicam unidades de força com unidades de comprimento, pelo que a unidade do Sistema Internacional de medidas é o **Newton por metro** ($\text{N} \cdot \text{m} = \text{kg} \cdot \text{m}^2 / \text{s}^2$). Esta combinação de unidades é tão usada que foi criada uma solução mais resumida para a sua representação, a qual se designa por **Joule** (J).

Newton por metro

Joule

Uma consideração relevante é que o trabalho é uma transferência de energia. Se W é o trabalho realizado num sistema e W é positivo, então a energia é transferida para o sistema; caso contrário, isto é, se W é negativo, então a energia é transferida do sistema.

© James Prescott Joule

Trabalho realizado por uma força não constante

Consideremos uma partícula que é disposta ao longo do eixo dos xx sob a ação de uma determinada força que varia com a posição. Nesta situação nós não podemos

usar a Equação 51 para calcular o trabalho realizado pela força, dado que esta não é constante ao longo da posição. Consideremos uma partícula que se move num deslocamento muito pequeno Δx . A componente em x de F_x é aproximadamente constante neste pequeno deslocamento, sendo que nós podemos fazer, do mesmo modo, a aproximação de que o trabalho exercido no mesmo deslocamento é igual à Equação 52.

$$W \approx F_x \Delta x$$

equação 52
trabalho (aproximação)

nota!! se se fizer um gráfico da componente da força F em x em ordem à posição em x , o trabalho da Equação 52 reflete-se na área de um pequeno intervalo de x .

Num gráfico da componente da força F em x em ordem à posição em x , se a curva for dividida num número muito grande de intervalos, então o trabalho total realizado por um deslocamento entre x_i e x_f é aproximadamente igual à soma de um número maior do termo da Equação 52 (Equação 53).

$$W \approx \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x$$

nota

equação 53
trabalho (segunda aproximação)

Se permitirmos que o deslocamento se aproximem de zero, então o número de termos no somatório da Equação 53 aumenta sem limite, mas o valor do somatório aproxima-se de um valor finito igual à área abaixo da curva do gráfico considerado antes (Equação 54).

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{x_i}^{x_f} F_x \Delta x = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

equação 54
trabalho como área do gráfico (desenvolvimento)

Por conseguinte, podemos expressar o trabalho exercido por uma força não constante pela Equação 55.

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx$$

equação 55
trabalho como área do gráfico

Trabalho realizado por uma mola

Um modelo de sistema comum para o qual a força varia com a posição, clássico, é o exemplo da mola. Na Figura 18 podemos ver um bloco num plano horizontal, sem atritos, que está ligado a uma mola. Se a mola estiver comprimida numa dada distância da sua posição de equilíbrio, ela irá exercer uma força no bloco dada pela Equação 56.

$$F_{mola} = -kx$$

equação 56
força de uma mola

nota!! na Equação 56 o literal x representa o deslocamento do bloco desde a sua posição de equilíbrio ($x = 0$) e k é uma constante positiva denominada de força constante de uma mola, conhecida pela **lei de Hooke** - esta lei apenas é válida para pequenos deslocamentos.

nota

lei de Hooke
© Robert Hooke

O sinal negativo na Equação 56 significa que a força exercida pela mola é sempre direcionada de forma contrária ao deslocamento. Por exemplo, quando $x > 0$ como na Figura 18 (primeiro caso), a força da mola está para a esquerda, ou negativa. Quando $x < 0$, como na Figura 18 (terceiro caso) a força da mola está para a direita, isto é, é positiva. Já quando $x = 0$ (segundo caso) a força da mola é nula, isto é, $F_{mola} = 0$ N. Sendo que a força da mola atua sempre em direção à posição de equilíbrio ela é por vezes denominada de força de restauro. Supondo que a mola está comprimida de modo a que esteja com uma distância de $-x_m$ da posição de equilíbrio, depois de largada, este mover-se-á de $-x_m$ passando por 0 e indo até $+x_m$. Se a mola estiver comprimida até que o bloco se encontre em x_m e depois este seja largado, o bloco mover-se-á de $+x_m$ através de 0 até $-x_m$.

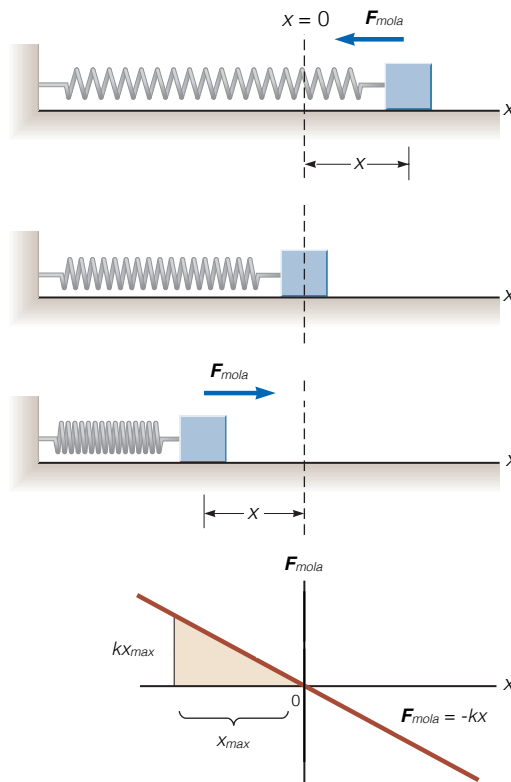


figura 18
trabalho de uma mola

Consideremos que o bloco é empurrado para a esquerda, numa distância x_m do equilíbrio e depois é largado. Calculemos o trabalho realizado pela força da mola enquanto o bloco se move de $x_i = -x_m$ até $x_f = 0$. Aplicando a Equação 55, temos a Equação 57.

$$W_{mola} = \int_{x_i}^{x_f} F_{mola} dx = \int_{-x_m}^0 (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_m^2$$

equação 57
trabalho de uma mola

Através da Equação 57 temos que o trabalho realizado por uma mola é positivo, porque a força tem a mesma direção que o deslocamento (ambos estão para a direita). O valor positivo de W_{mola} confirma que a energia é transferida da mola para o bloco. No entanto, se nós considerarmos o trabalho realizado pela mola enquanto o bloco se desloca de $x_i = 0$ até $x_f = x_m$, nós descobrimos que W_{mola} é igual ao simétrico

do resultado da Equação 57, dado que para esta parte do movimento o deslocamento está a ser realizado para a direita e a força da mola está a ser feita para a esquerda (direções opostas).

O gráfico que podemos encontrar na Figura 18 é um gráfico da componente em x da força F_{mola} em ordem a x . O trabalho calculado na Equação 57 é a área correspondente ao triângulo sombreado do gráfico.

Se o bloco entra num deslocamento arbitrário desde $x = x_i$ para $x = x_f$, o trabalho realizado pela força da mola é obtido pela Equação 58.

$$W_{mola} = \int_{x_i}^{x_f} (-kx) dx = \frac{1}{2} kx_i^2 - \frac{1}{2} kx_f^2$$

equação 58
trabalho de uma mola
(revisitado)

Energia cinética e teorema do trabalho-energia

Soluções através da segunda lei de Newton podem ser difíceis de obter se as forças envolvidas no problema forem complexas. Uma aproximação alternativa que nos permite compreender e resolver muitos problemas de movimentos está na relação entre velocidade de uma partícula e o seu deslocamento realizado por uma força resultante.

Consideremos um bloco que se desloca x metros, com massa m , para a direita, sob a ação de uma força F . Porque a força é constante, pela segunda lei de Newton sabemos que a partícula em questão ir-se-á mover a uma aceleração constante a . Sendo assim, o trabalho resultante efetuado pela partícula é calculado através da Equação 59.

$$W_{res} = F \cdot x = (m \cdot a) \cdot x$$

equação 59
trabalho resultante

Tendo conhecimento dos desenvolvimentos de a e de x , expressos na Equação 60 e Equação 61, substituindo essas expressões na Equação 59, obtemos a Equação 62.

$$x = \frac{1}{2} (v_i + v_f) t$$

$$a = \frac{v_f - v_i}{t}$$

$$W_{res} = m \left(\frac{v_f - v_i}{t} \right) \frac{1}{2} (v_i + v_f) t = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2$$

equação 60
desenvolvimento de x

equação 61
desenvolvimento de a

equação 62
trabalho resultante
(revisitado)

A quantidade da primeira parcela do resultado da Equação 62 representa a energia associada com o movimento da partícula. Este resultado é tão importante que lhe foi dado o nome de **energia cinética**. A energia cinética, representada por E_c , de uma partícula com massa m e que se move a uma velocidade v é definida pela Equação 63.

energia cinética

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

equação 63
energia cinética

A energia cinética é uma quantidade escalar e tem como unidades, as mesmas que o trabalho. Por exemplo, uma massa de 2 kg que se move a uma velocidade de 4 m.s⁻¹ tem uma energia cinética de 32 J. Nós podemos pensar na energia cinética

como a energia associada com o movimento de um corpo. É frequente reescrever a Equação 63 na forma da Equação 64.

$$W_{res} = E_{c_f} - E_{c_i} = \Delta E_c$$

equação 64

teorema de trabalho-energia

Este revisitar da expressão da energia cinética, de forma a que possa ser apresentada da forma da Equação 64 significa que o trabalho realizado pela força resultante constante \mathbf{F} pelo deslocamento de uma partícula, é igual à variação da sua energia cinética. Este resultado é uma conclusão vital em termos de energia e física, daí ser denominado de **teorema de trabalho-energia**.

teorema de trabalho-energia

Energia potencial de um sistema

Até agora definimos um sistema de forma muito genérica, embora nos tenhamos focado principalmente em partículas individuais e objetos sob influência de forças externas. Consideremos agora sistemas de duas ou mais partículas e objetos que interagem na prática de forças que são internas ao próprio sistema. A energia cinética deste sistema é a soma algébrica das energias cinéticas de todos os constituintes deste novo sistema. Podem haver alguns, contudo, nos quais um objeto é tão grande (tão significativo) que pode ser considerado como estacionário e que guarda uma energia cinética que pode ser desprezada.

Consideremos o sistema bola-Terra, no qual a bola cai em direção a Terra, onde a energia cinética pode ser designada simplesmente pela energia cinética da bola. Isto acontece porque a Terra move-se tão lentamente que nós podemos ignorar a sua energia cinética. Por outro lado, a energia cinética de um sistema de dois elétrons deve incluir a energia cinética de ambas as partículas.

Analisemos agora um novo sistema do qual pertencem um livro e a Terra, que interagem pela força gravitacional. Ao levantar lentamente o livro do repouso, há trabalho que é realizado através de um deslocamento $\Delta \mathbf{r} = (y_f - y_i)\mathbf{j}$. De acordo com o nosso estudo acerca do teorema do trabalho-energia, este trabalho realizado no sistema deve constar como um aumento na energia total do sistema. O livro encontra-se em repouso antes de ser realizado o trabalho em causa e volta a permanecer em repouso após o trabalho, pelo que não há variação da energia cinética do sistema.

Porque a variação de energia do sistema não existe sob a forma de energia cinética, o teorema do trabalho-energia não tem como ser aplicado neste caso e a variação de energia deve constar como uma forma de armazenamento de energia, ao invés de energia cinética. Depois de levantar o livro nós podemos sempre deixá-lo cair e fazê-lo regressar à posição y_i . Note-se que o livro (por conseguinte, o sistema) agora tem energia cinética e a sua fonte está no trabalho que foi realizado ao levantar o livro. Enquanto o livro esteve no seu ponto de posição vertical (altura) mais alto, o sistema teve o **potencial** de conter energia cinética, mas não a teve até que ele fosse largado. A esse mecanismo de armazenamento de energia damos o nome de **energia potencial**. Descobrimos assim que a energia potencial de um sistema pode ser exclusivamente associado com tipos de forças específicos que atuam entre membros de um determinado sistema. A quantidade de energia potencial num sistema é determinado pela configuração do sistema.

potencial

energia potencial

Derivemos agora uma expressão para a energia potencial associada a um determinado objeto numa dada posição sob a superfície da Terra. Consideremos para tal um objeto externo de massa m que levanta o objeto desde uma posição inicial y_i acima do chão até uma posição y_f . Assumamos que o movimento é feito lentamente, sem aceleração, de forma a que a força aplicada do agente externo é igual em módulo à

força gravitacional no objeto: o objeto está modelado como uma partícula em equilíbrio que se move a uma velocidade constante. O trabalho realizado pelo agente externo no sistema objeto-Terra é dado pelo produto interno da força aplicada verticalmente \vec{F}_{apl} pelo deslocamento vertical desta força $\Delta\vec{r} = \Delta y\hat{j}$ (Equação 65):

$$W_{externo} = (\vec{F}_{apl}) \cdot \Delta\vec{r} = (mg\hat{j}) \cdot [(y_f - y_i)\hat{j}] = mgy_f - mgy_i$$

equação 65
trabalho realizado pelo agente externo

Na Equação 65 mostra-se um resultado que se reflete no trabalho resultante realizado no sistema. Note-se a semelhança entre a Equação 65 e a Equação 62. Em cada equação, o trabalho realizado no sistema é igualado à diferença entre os valores final e inicial de uma dada quantidade. Na Equação 62 o trabalho representa uma transferência de energia para o sistema e o aumento energético tem forma cinética. Por outro lado, na Equação 65 o trabalho representa uma transferência de energia para o sistema e a energia do sistema apresenta-se sob outra forma, à qual demos o nome de energia potencial. Sendo assim, podemos identificar a quantidade mgy como a **energia potencial gravítica** E_p , do sistema objeto de massa m com a Terra (Equação 66).

energia potencial gravítica

$$E_p \equiv mgy$$

equação 66
energia potencial

A unidade da energia potencial gravítica é o Joule (J), a mesma unidade aplicada ao trabalho (W) e à energia cinética (E_c). A energia potencial, tal como a energia cinética e o trabalho, é uma quantidade escalar. Note-se que a Equação 66 é apenas válida para objetos próximos da superfície da Terra, onde g é aproximadamente constante.

Potência

Consideremos a seguinte situação, conforme a Figura 19.

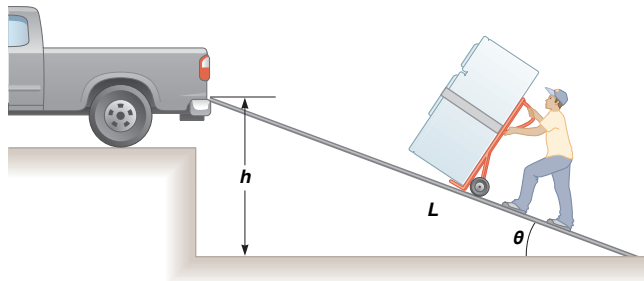


figura 19
potência

Suponhamos que o homem na Figura 19 não está convencido que o trabalho realizado é o mesmo, qualquer que seja o comprimento da rampa e tal provoque uma longa rampa com uma subida muito suave. Embora ele faça a mesma quantidade de trabalho que outra pessoa usando uma rampa muito mais pequena, ele demora mais tempo a executar tal ação, porque terá uma distância muito maior a cumprir. Como podemos destacar de tal conclusão, a única diferença entre ambos os casos é um intervalo de tempo - o intervalo de tempo que demora a fazer a ação até ao fim. Ao rácio da quantidade de energia gasta por intervalo de tempo dá-se o nome de **potência instantânea** P e define-se pela Equação 67.

potência instantânea

$$P \equiv \frac{dE}{dt}$$

equação 67
potência instantânea

Se uma força externa é aplicada a um objeto (que podemos considerar como uma partícula) e se o trabalho realizado por esta força no objeto no intervalo de tempo Δt é igual a W , a **potência média** $P_{m\acute{e}dia}$ é equacionada pela Equação 68.

potência média

$$P_{m\acute{e}dia} = \frac{W}{\Delta t}$$

equação 68
potência média

Sendo assim, no exemplo da Figura 19, temos que, embora o trabalho seja o mesmo ao levantar o frigorífico em ambos os exemplos de rampa, menos potência é requerida para a rampa com maior distância e ângulo mais suave (menor).

De forma algo semelhante às nossas aproximações de velocidade e aceleração, a potência instantânea é o valor limite da potência média quando Δt tende para zero, como revelamos na Equação 69.

$$P = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{W}{\Delta t} = \frac{dW}{dt}$$

equação 69
potência instantânea

nota!! na Equação 69 está representado o valor infinitesimal do trabalho realizado por dW , onde $dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$. Por conseguinte, a potência instantânea pode ser re-escrita como na Equação 70, onde $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$.

nota

$$P = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

equação 70
potência instantânea
(revisitada)

A unidade do Sistema Internacional (SI) de potência é o Joule por segundo (J/s), usualmente denominado de **Watt** (W), em homenagem a James Watt (1736-1819) (Equação 71).

Watt
⊙ James Watt
equação 71
unidade SI Watt

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J/s} = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^3$$

Uma outra unidade muito conhecida de potência é o **cavalo-potência** (*horsepower* em inglês), hp (ou cv, em Portugal) (Equação 72).

cavalo-potência

$$1 \text{ hp} = 746 \text{ W}$$

equação 72
unidade cavalo-potência (hp)

Uma unidade de energia (ou trabalho) pode agora ser definida em termos de uma unidade de potência. Um **quilowatt-hora** (kWh) é a energia transferida numa hora à razão constante de $1 \text{ kW} = 1000 \text{ J/s}$.

quilowatt-hora

Momento linear

Anteriormente aprendemos a estudar situações que envolvessem análise através das Leis de Newton. Somos então, agora, capazes de resolver problemas que envolvam situações análogas, identificando o sistema em causa e aplicando o princípio da conservação ou princípio da conservação de energia. Consideremos agora uma situação

e vejamos se somos capazes de a resolver com os modelos que desenvolvemos até ao momento. Consideremos então um arqueiro de 60 kg, em repouso, numa superfície sem atrito, que dispare uma flecha de 0.030 kg de forma horizontal com velocidade de 85 m/s. A questão pertinente é: que velocidade terá o arqueiro após o disparo?

Pela terceira lei de Newton, sabemos que a força que o arco exerce sobre a flecha é igualado à força contrária que a flecha exerce sobre o arco. Esta força faz com que o próprio arqueiro retroceda num movimento retilíneo sobre a superfície onde repousara, com a velocidade pedida no nosso enunciado. Nós não conseguimos saber essa velocidade através dos modelos que estudámos até agora, dado que não sustemos qualquer informação relativa à aceleração do arqueiro. Do mesmo modo, não podemos usar qualquer modelo anteriormente estudado de forças sob a ação resultante destas, dado que não temos também qualquer informação acerca das forças que interagem neste exemplo. De forma algo análoga, os modelos energéticos de pouco nos poderão ajudar, dado que também não temos informação acerca do trabalho exercido sobre o arco ou do potencial elástico no sistema.

Apesar da nossa incapacidade de resolver este problema usando os modelos estudados até ao momento, este exemplo é muito simples de resolver se tomarmos em conta uma nova quantidade capaz de descrever o próprio movimento - chamamos-lhe de **momento linear**. Para criar esta nova quantidade consideremos um sistema isolado de apenas duas partículas tal como na Figura 20, com massas m_1 e m_2 , movendo-se, ambas, com velocidades v_1 e v_2 , num dado instante de tempo.

momento linear

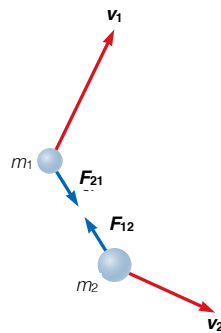


figura 20
sistema isolado de duas partículas

Porque o sistema é isolado a única força que atua numa partícula é a que provém da outra partícula. Se uma força partir da partícula 1 (imaginemos, uma força gravitacional) e atuar na partícula 2, deve existir uma segunda força - igual em módulo, mas oposta em direção - que provém da partícula 2 e atue na partícula 1. Isto é, as forças executam um par ação-reação previsto pela terceira lei de Newton, e $F_{12} = -F_{21}$. Podemos estabelecer esta condição como exprimido na Equação 73.

$$\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12} = 0$$

equação 73
resolução por terceira lei de Newton

Incorporando a segunda lei de Newton, temos que no instante mostrado na Figura 20, as partículas têm acelerações correspondentes às forças aplicadas nelas próprias. Por conseguinte, substituindo a força em cada partícula por $m \cdot a$ dá o resultado visível na Equação 74.

$$m_1 \vec{a}_1 + m_2 \vec{a}_2 = 0$$

equação 74
resolução por segunda lei de Newton

Se substituirmos cada aceleração com a definição dada atrás temos que (Equação 75):

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} + m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} = 0$$

equação 75
resolução por segunda lei de Newton (revisitada)

Se as massas m_1 e m_2 forem constantes podemos levantar a seguinte derivação (Equação 76):

$$\frac{d(m_1 d\vec{v}_1)}{dt} + \frac{d(m_2 d\vec{v}_2)}{dt} = 0 \therefore \frac{d}{dt}(m_1 d\vec{v}_1 + m_2 d\vec{v}_2) = 0$$

equação 76
resolução por derivação (revisitada)

Note-se que a derivada em Equação 76 com atenção ao tempo é zero. Por conseguinte, esta soma deve ser constante. Aprendemos assim que a quantidade $m\mathbf{v}$ para uma partícula é um resultado importante, pelo que a soma destas quantidades para um sistema isolado é conservado. A esta quantidade dá-se o nome, então, de **momento linear**.

momento linear

Em suma, o momento linear de uma partícula ou de um objeto que pode ser considerado partícula com massa m e velocidade \mathbf{v} é definido como o produto da massa e da velocidade (Equação 77).

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

equação 77
momento linear

O momento linear é uma quantidade vetorial porque este provém do produto de uma quantidade escalar m com uma quantidade vetorial \mathbf{v} . A sua direção é a mesma de \mathbf{v} , tendo dimensões *massa . comprimento/tempo*, pelo que a sua unidade SI é o kg.m/s.

Se uma dada partícula está em movimento numa direção completamente arbitrária, \mathbf{p} tem três componentes e a Equação 77 é equivalente às seguintes três componentes (Equação 78):

$$p_x = mv_x \quad p_y = mv_y \quad p_z = mv_z$$

equação 78
momento linear
(componentes)

Como podemos verificar do seu próprio conceito, o momento dá-nos uma distinção quantitativa entre partículas leves e pesadas num movimento a velocidades iguais. Por exemplo o momento linear de uma bola de bowling é muito maior que o de uma bola de ténis movendo-se à mesma velocidade. Newton chamou a este produto $m\mathbf{v}$ “quantidade de movimento”, o que nos pode dar uma perspetiva um pouco mais visual acerca do significado da palavra atual “momento”, proveniente do antigo latim para “movimento”.

Usando a segunda lei de Newton, podemos agora relacionar o momento linear com a resultante das forças a atuar numa determinada partícula. Começemos por substituir a definição de aceleração na própria expressão da segunda lei de Newton (Equação 79).

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

equação 79
segunda lei de Newton (revisitada)

Se tomarmos m como constante, podemos levar m para o interior da derivação, que provoca a seguinte alteração (Equação 80):

$$\sum \vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

equação 80
segunda lei de Newton
(revisitada)

A Equação 80 mostra-nos que a razão de variação de momento linear de uma dada partícula é igual à resultante das forças que atuam sobre a partícula.

nota!! o momento linear de um sistema isolado é conservado - embora o momento seja conservado quando é isolado, o momento linear de uma partícula contida no sistema isolado não tem de ser necessariamente conservado, dado que outras partículas contidas também no sistema podem interagir com esta.

nota

Parece que ainda não resolvemos o nosso problema inicial, do arqueiro de 60 quilos. Para concluir voltemos então atrás e procuremos resolver, tendo agora conhecimento da nova quantidade momento linear.

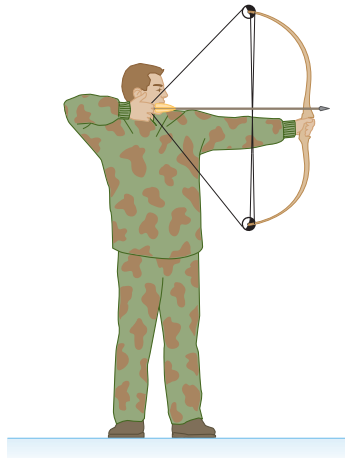


figura 21
arqueiro em superfície
sem atrito

Como já verificámos nenhum dos modelos estudados até ao momento linear não servem para resolver este problema, mas como não existem forças externas a atuarem, podemos aplicar o modelo do sistema isolado e analisar o momento linear, dado que este é conservado.

O momento linear horizontal total do sistema antes da flecha ser disparada é igual a zero porque o sistema não se encontra em movimento. Por conseguinte, o momento linear horizontal total após o disparo também tem de ser zero, dado que não haverá movimento também. Considerando a direção de disparo como x positivo e identificando o arqueiro como “partícula 1” e a flecha como “partícula 2”, temos que $m_1 = 60$ kg, $m_2 = 0.030$ kg, $v_{2f} = 85\hat{i}$ m/s. Usando o momento linear para o sistema isolado temos a Equação 81.

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}_f - \vec{p}_i = 0 \rightarrow \vec{p}_f = \vec{p}_i \rightarrow m_1 \vec{v}_{1f} + m_2 \vec{v}_{2f} = 0$$

equação 81
resolução por momento
linear

Resolvendo a Equação 81 em ordem a v_{1f} e substituindo valores numéricos, temos a Equação 82.

$$\vec{v}_{1f} = -\frac{m_2}{m_1} \vec{v}_{2f} = -\left(\frac{0.030 \text{ kg}}{60 \text{ kg}}\right)(85 \hat{i} \text{ m/s}) = 0.042 \hat{i} \text{ m/s}$$

equação 82
resolução por momento
linear (continuação)

Momento linear num sistema não isolado

A Equação 80 diz-nos que o momento linear de uma dada partícula muda se a resultante das forças atuar sobre ela. O mesmo poderá ser dito acerca da resultante das forças atuar sobre o sistema: o momento linear de um sistema muda se a resultante das forças atuar no sistema.

Em considerações a nível do momento linear, um sistema é não isolado se a resultante das forças atuar no sistema num dado intervalo de tempo. Neste caso, podemos ver o momento linear a ser transferido do sistema para o ambiente por força da resultante das forças. Conhecendo a variação no momento causada por uma determinada força é útil em muitos problemas. De forma a criarmos uma ideia mais forte acerca disto, assumamos que a resultante das forças $\Sigma \vec{F}$ atua na partícula e esta força pode variar com o tempo. Pela segunda lei de Newton e pela Equação 80 temos a Equação 83.

$$d\vec{p} = \sum \vec{F} dt$$

equação 83
momento linear conjugado
com segunda lei de
Newton

Podemos agora integrar esta expressão de forma a encontrarmos a variação no momento linear de uma partícula quando uma força atua sobre um determinado intervalo de tempo. Se o momento linear da partícula mudar de \vec{p}_i no instante t_i para \vec{p}_f no instante t_f , a integração fica como a Equação 84.

$$\Delta \vec{p} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

equação 84
integração por momento
linear

Para calcular o integral precisamos de saber como é que a resultante das forças varia com o tempo. A quantidade à direita da Equação 84 é denominada de **impulso** da resultante das forças que atua numa partícula num dado intervalo de tempo Δt (Equação 85).

impulso

$$\vec{I} \equiv \int_{t_i}^{t_f} \sum \vec{F} dt$$

equação 85
impulso

Se combinarmos agora as Equação 84 e Equação 85 temos um novo resultado, não menos importante, ao qual se deu a designação de **teorema do impulso-momento** (Equação 86).

teorema do
impulso-momento

$$\Delta \vec{p} = \vec{I}$$

equação 86
teorema do
impulso-momento

O teorema em Equação 86 diz-nos que a variação no momento linear de uma dada partícula é igual ao impulso da resultante das forças a atuarem sobre a partícula. Esta conclusão é equivalente à segunda lei de Newton

Colisões unidirecionais

Nesta secção iremos usar o modelo do sistema isolado para descrever o que acontece quando duas partículas colidem. O termo **colisão** representa um evento durante o qual duas partículas se aproximam e interagem através de forças. As forças presentes nessa interação consideram-se, à partida, muito maiores que qualquer outra força externa, pelo que podemos usar a aproximação de impulso.

Quando duas partículas de massa m_1 e massa m_2 colidem, as forças impulsivas podem variar no tempo de forma muito complexa. Apesar da complexidade do comportamento de tempo em relação ao impulso, esta força é interna ao sistema isolado de duas partículas. Por conseguinte, as duas partículas formam um sistema isolado e o momento linear deve ser sempre conservado, seja qual for a colisão.

Por outro lado, a energia cinética total de um sistema de partículas pode, ou não, ser conservado, dependendo, claro está, no tipo de colisão que sofre. De facto, as colisões estão organizadas por diferentes categorias, sendo elásticas ou inelásticas, dependendo se a energia cinética é conservada ou não.

Uma **colisão elástica** entre dois objetos é aquela na qual a energia cinética total, tal como o momento linear total do sistema é conservado, isto é, é igual antes e depois da colisão. No mundo real, colisões como o de duas bolas de bilhar é uma aproximação francamente boa deste caso de colisões, pelo que a energia é transferida na colisão, provocando a reação das bolas recuarem após embate.

Uma **colisão inelástica** é aquela que, ao contrário da elástica, não preserva a energia cinética total no pós-colisão, mesmo que o momento linear seja conservado. Quando dois objetos permanecem juntos após colisão dá-se o nome de **colisão perfeitamente inelástica**. Começemos por analisar este caso primeiro. Consideremos então duas partículas de massas m_1 e m_2 em movimento com velocidades \mathbf{v}_{1i} e \mathbf{v}_{2i} . As duas partículas colidem e executam um movimento, enquanto juntos, com uma velocidade comum \mathbf{v}_f . Porque o momento linear de um sistema isolado é conservado em qualquer colisão, podemos dizer que o momento linear total antes da colisão é igual ao momento total do sistema após a colisão (Equação 87).

$$\Delta \vec{p} = 0 \rightarrow \vec{p}_f = \vec{p}_i \rightarrow m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i} = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \therefore \vec{v}_f = \frac{m_1 \vec{v}_{1i} + m_2 \vec{v}_{2i}}{m_1 + m_2}$$

Analisemos agora um caso de colisão elástica. Para tal voltemos a considerar duas partículas de massas m_1 e m_2 em movimento com velocidades \mathbf{v}_{1i} e \mathbf{v}_{2i} . Após a colisão cada partícula avança com uma determinada velocidade, sendo elas \mathbf{v}_{1f} e \mathbf{v}_{2f} . Numa colisão elástica, ambos momentos linear e energia cinética do sistema são conservados. Sendo assim, considerando velocidades ao longo de uma só direção na horizontal temos as seguintes equações em Equação 88.

$$p_i = p_f \rightarrow m_1 v_{1i} + m_2 v_{2i} = m_1 v_{1f} + m_2 v_{2f} \quad (1)$$

$$E_{c_i} = E_{c_f} \rightarrow \frac{1}{2} m_1 v_{1i}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2i}^2 = \frac{1}{2} m_1 v_{1f}^2 + \frac{1}{2} m_2 v_{2f}^2 \quad (2)$$

Porque todas as velocidades em causa têm direção para esquerda ou para a direita elas podem ser representadas pelo seu módulo e pelo sinal algébrico representando uma das duas direções possíveis - representaremos sinal positivo de v quando a direção é para a direita e negativo caso contrário.

colisão

colisão elástica

colisão inelástica

colisão perfeitamente inelástica

equação 87

momento linear em colisão

equação 88

momento linear e energia cinética em colisão

Num problema típico de colisão elástica, há sempre duas quantidades desconhecidas que podem ser equacionadas pelas Equação 88 (1) e Equação 88 (2) (Equação 89).

$$m_1(v_{1i}^2 - v_{1f}^2) = m_2(v_{2f}^2 - v_{2i}^2)$$

equação 89
duas quantidades
desconhecidas (1)

Fatorizando os dois membros da equação temos que (Equação 90):

$$m_1(v_{1i} - v_{1f})(v_{1i} + v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})(v_{2f} + v_{2i})$$

equação 90
duas quantidades
desconhecidas (2)

De seguida separamos os termos que contêm m_1 e m_2 de forma semelhante para obter a Equação 91.

$$m_1(v_{1i} - v_{1f}) = m_2(v_{2f} - v_{2i})$$

equação 91
duas quantidades
desconhecidas (3)

Dividindo a Equação 89 pela Equação 90, temos a Equação 92.

$$v_{1i} + v_{1f} = v_{2f} - v_{2i}$$

equação 92
duas quantidades
desconhecidas (4)

Rearranjando os termos mais uma vez de forma a ter as quantidades iniciais à esquerda e as quantidades finais à direita, temos a Equação 93.

$$v_{1i} - v_{2i} = -(v_{1f} - v_{2f})$$

equação 93
duas quantidades
desconhecidas (5)

A Equação 93, em combinação com a Equação 88 (1) pode ser usada para resolver problemas relacionados com colisões elásticas. Suponhamos que tanto as massas como as velocidades iniciais são sabidas. O par de equações designado pode ser resolvido para obter os valores finais, em termos das velocidades iniciais, dado que há duas equações e duas incógnitas (Equação 94).

$$v_{1f} = \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (1)$$

$$v_{2f} = \left(\frac{2m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{1i} + \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} \right) v_{2i} \quad (2)$$

equação 94
duas quantidades
desconhecidas (final)

Centro de massa

Por uma questão de simplificação é ideal representar objetos por partículas, como já estudámos anteriormente. Sendo assim há um ponto que nos permite representar mais facilmente um objeto a nível de posicionamento vetorial. A esse ponto damos o nome de **centro de massa** do sistema. Qualquer que seja a dimensão do sistema ou mesmo a sua densidade, todos os sistemas têm um ponto definido - precisamente o centro de massa. Este ponto pode ser visto como o ponto médio de distribuição da massa num dado sistema de partículas. Para calcular este ponto precisamos de ter em conta o número de partículas constituintes do sistema. Sendo

centro de massa

assim, tendo várias massas m_i em três dimensões a coordenada x do centro de massa de n partículas pode ser calculado como explícito na Equação 95.

$$x_{\text{CM}} \equiv \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \dots + m_nx_n}{m_1 + m_2 + m_3 + \dots + m_n} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i x_i}{M} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i$$

equação 95
posição por x do centro de massa

Claro está que, sendo M em Equação 95 igual ao $\sum_{(i)} m_i$, para as restantes coordenadas temos a Equação 96.

$$\left\{ \begin{array}{l} x_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \\ y_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \\ z_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \end{array} \right.$$

equação 96
posição por x, y, z do centro de massa

O centro de massa também pode ser localizado em três dimensões através do seu vetor posição \vec{r}_{CM} , cujos componentes estão na Equação 96. Sendo assim eis a Equação 97.

$$\vec{r}_{\text{CM}} = x_{\text{CM}} \hat{\mathbf{i}} + y_{\text{CM}} \hat{\mathbf{j}} + z_{\text{CM}} \hat{\mathbf{k}} = \frac{1}{M} \sum_i m_i x_i \hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{M} \sum_i m_i y_i \hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{M} \sum_i m_i z_i \hat{\mathbf{k}}$$

equação 97
vetor posição do centro de massa

De uma forma geral, o vetor posição tem a expressão em Equação 98.

$$\vec{r}_{\text{CM}} \equiv \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{r}_{\text{CM}}$$

equação 98
vetor posição do centro de massa (geral)

Rotação de objetos rígidos sobre um eixo

Quando um objeto mais complexo como uma roda gira sobre um eixo, o seu movimento não pode ser avaliado sob a forma de um modelo de partículas, porque a instantes de tempo diferentes cada partícula tem uma velocidade linear e uma aceleração linear diferentes. Podemos, no entanto, avaliar sob a forma de um sistema de partículas, sendo que cada uma tem a sua velocidade linear e a sua aceleração linear.

Tratando-se de um objeto em rotação, por uma questão de simplificação vamos considerar apenas objetos rígidos, isto é, indeformáveis.

Posição, velocidade e aceleração angular

De forma análoga à que usamos para estudar os conceitos de posição, velocidade e aceleração no início da disciplina, apliquemos agora os nossos conhecimentos para a análise de casos curvilíneos, isto é, com formas angulares, para movimentos de rotação.

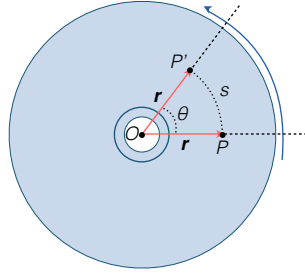


figura 22
disco CD

A Figura 22 ilustra uma perspectiva de cima de um CD (*compact disk*) no qual, enquanto parado escolhemos um ponto da sua superfície - o ponto P . Quando iniciamos a rotação do disco a um instante de tempo t parámos a sua execução, tendo o ponto P mudado a sua posição, numa trajetória em arco s , tornando-se ponto P' . Note-se que a distância entre o centro O e o ponto em estudo é sempre a mesma, designada pelo módulo do vetor r . Por uma questão de simplificação é preferível designar o ponto P ou P' nas suas coordenadas polares, sendo $P = (r, \theta)$, onde r é a distância entre O e P e θ é o ângulo medido no sentido anti-horário da linha de referência para a abertura do ângulo formado. Nesta representação o ângulo modifica-se enquanto que a distância representada por r mantém-se constante. Podemos definir o comprimento da trajetória de arco, s , então, como a Equação 99.

$$s = r\theta \therefore \theta = \frac{s}{r}$$

equação 99
ângulo e arco

Dado que o disco na Figura 22 é um objeto rígido, enquanto a partícula P se move através de um ângulo θ desde a linha de referência, todas as outras partículas também efetuam esse movimento. Por conseguinte, podemos designar **posição angular** como o ângulo formado entre a linha de referência e a referência atual do objeto. Porque a nossa partícula P move-se de P para P' , podemos designar também o **deslocamento angular**, sendo este caracterizado pela variação angular desde o ponto de partida até ao final. No entanto este deslocamento angular pode ser desencadeado ao longo do tempo (Δt) por diferentes razões matemáticas. Para quantificar essas razões calcula-se a **velocidade angular média**, designada pela letra grega minúscula “omega” $\omega_{média}$ (Equação 100).

posição angular

deslocamento angular

velocidade angular média

$$\omega_{média} = \frac{\theta_f - \theta_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

equação 100
velocidade angular média

Para calcular a velocidade angular num determinado instante temos o cálculo do limite da velocidade à média, pela Equação 101, denominada de **velocidade angular instantânea**.

velocidade angular instantânea

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

equação 101
velocidade angular instantânea

A unidade de velocidade angular é a radiano por segundo (rad/s) ou s^{-1} , dado que o radiano é adimensional.

Se a velocidade angular instantânea muda de ω_i para ω_f num dado intervalo de tempo Δt , isto significa que existe uma aceleração angular. A **aceleração angular média**, designada pela letra minúscula grega alfa, $\alpha_{m\acute{e}dia}$ (Equação 102).

$$\alpha_{m\acute{e}dia} \equiv \frac{\omega_f - \omega_i}{t_f - t_i} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

aceleração angular média

equação 102

aceleração angular média

Do mesmo modo que a velocidade angular instantânea, também é possível calcular a **aceleração angular instantânea** (Equação 103).

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

aceleração angular instantânea

equação 103

aceleração angular instantânea

A unidade de aceleração angular é o radiano por quadrado de segundo (rad/s^2) ou apenas s^{-2} .

Momento angular, da força e de inércia

Consideremos um objeto rígido que se encontra em rotação sobre um eixo com uma velocidade angular ω . Um elemento de massa m_i tem um módulo de velocidade linear devido à rotação $v_i = \omega r_i$, onde r_i é a distância do elemento de massa ao eixo de rotação. A energia cinética do corpo é a soma das energias cinéticas de todos os elementos de massa (Equação 104).

$$E_c = \sum_i E_c(m_i) = \frac{1}{2} \sum_i m_i v_i^2 = \frac{1}{2} \sum_i m_i \omega^2 r_i^2 = \frac{1}{2} \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega^2 \equiv \frac{1}{2} I \omega^2$$

equação 104

energia cinética

Na Equação 104 temos uma nova definição à qual designámos de I . Esta nova definição está repetida na Equação 105 e é denominada de **momento de inércia**.

momento de inércia

$$I = \sum_i m_i r_i^2$$

equação 105

momento de inércia

Se ao invés de termos uma distribuição discreta de massas tivéssemos uma distribuição contínua de massas, o momento de inércia seria dado pela Equação 106.

$$I = \int r^2 dm = \int_{\text{volume}} r^2 \rho(r) dV$$

equação 106

momento de inércia (revisitado)

nota!! na Equação 106 r é a distância entre o ponto considerado e o eixo de rotação, $\rho(r)$ é a densidade de massa nesse ponto e dV é o elemento de volume.

nota

Verifique-se que as expressões para a energia cinética associada à translação e à rotação são mapeadas traduzindo a massa inercial pelo momento de inércia e a velocidade linear pela velocidade angular (Equação 107).

equação 107

comparação de translação e rotação

$$E_c^{\text{translação}} = \frac{1}{2} m v^2 \leftrightarrow E_c^{\text{rotação}} = \frac{1}{2} I \omega^2, \text{ dado que } m \leftrightarrow I \text{ e } v \leftrightarrow \omega$$

É frequente acontecer que o momento de inércia de um determinado corpo tenha de ser calculado relativamente a diferentes eixos paralelos sobre os quais o corpo pode rodar. Para tal é útil considerar o **teorema de Steiner**, também chamado de **teorema dos eixos paralelos** (Equação 108).

$$I = I_{\text{CM}} + Md^2$$

O teorema de Steiner enuncia-se da seguinte forma: “se um corpo de massa M tem um momento de inércia I_{CM} relativamente a um eixo que passa pelo seu centro de massa, então o mesmo corpo terá um momento de inércia dado pela Equação 108 relativamente a outro eixo, paralelo ao primeiro, que se encontra à distância d do primeiro”.

É intuitivo, também, que para alterar um movimento de rotação seja relevante não só a força aplicada, mas também o local onde é aplicada e a direção em que é aplicada. Por exemplo, para abrir ou fechar uma porta, aplicando a mesma força próximo da dobradiça ou no puxador permite-nos concluir que obtemos resultados completamente diferentes. À quantidade que desempenha o papel fundamental na dinâmica de rotação dá-se o nome de **momento de força** ou **torque** (também há quem denomine de **binário**), representado pela letra minúscula grega tau τ . Sendo assim, o momento da força \mathbf{F} , aplicada num ponto P relativamente a um ponto O é definido pela Equação 109, onde \mathbf{r} é o vetor posição de P relativamente a O e ‘ \times ’ representa o produto vetorial entre os dois vetores.

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

A magnitude do torque, por outro lado, é calculado através da expressão da Equação 110.

$$\tau = |\vec{\tau}| = |\vec{r}| |\vec{F}| \sin \theta$$

O torque é a quantidade que na dinâmica de rotação desempenha o mesmo papel que a força desempenha na dinâmica de translação. O seu total é simplesmente a adição vetorial de todos os torques que atuam sobre o sistema.

Qual é a forma análoga da segunda lei de Newton em termos de rotação? Para respondermos a esta questão precisamos de introduzir um novo conceito - o de **momento angular**, \mathbf{L} . O momento angular de uma partícula com momento linear \mathbf{p} , relativamente a um ponto O , representa-se pela Equação 111, onde \mathbf{r} é o vetor posição da partícula P em relação ao ponto O .

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

2. Sistemas Oscilatórios

Este novo capítulo pretende iniciar o estudo de um diferente tipo de movimento, este, caracterizado pela sua periodicidade, isto é, por ter uma propriedade, pelo menos, que o torna repetitivo, discriminando um determinado intervalo de tempo e uma dada variação de posições. A este tipo de movimentos damos o nome de **movimentos oscilatórios** e nós iremos estudar um destes movimentos mais em

teorema de Steiner
teorema dos eixos paralelos
equação 108
teorema de Steiner
 © Jakob Steiner

momento de força, torque
binário

equação 109
torque

equação 110
módulo do torque

momento angular

equação 111
momento angular

movimentos oscilatórios

particular, chamado de movimento harmônico simples, dado que veremos que todos os movimentos periódicos são produto de combinações de vários movimentos harmônicos simples.

Movimento harmônico simples

O **movimento harmônico simples** é base de grande parte do nosso conhecimento de processamento de sinais e de ondas mecânicas. As ondas sonoras, sísmicas ou até mesmo as ondas do mar são todas produzidas por uma fonte de oscilação.

De forma a podermos desenvolver uma representação matemática para o modelo de partículas em movimento harmônico simples, primeiro, escolhemos o eixo dos xx como eixo base para a nossa oscilação. Como já devemos saber, $a = dv/dt = d^2x/dt^2$, pelo que podemos exprimir a Equação 112.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x$$

Se denotarmos o quociente k/m com o símbolo ω^2 , como na Equação 113, a Equação 112 pode ser re-escrita na Equação 114.

$$\omega^2 = \frac{k}{m}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2x$$

Procurando agora uma solução para a Equação 114, isto é, uma função do tipo $x(t)$ que satisfaça a equação do segundo grau que é a Equação 114, encontramos uma equação que nos será capaz de dar a posição da partícula em movimento harmônico simples ao longo do tempo. Procuramos uma expressão cuja segunda derivada é a mesma que a original, mas com sinal negativo e multiplicada por ω^2 . As funções trigonométricas seno e cosseno, como vimos em Cálculo I (a1s1), têm este tipo de comportamento. Logo, podemos resolver uma solução através de uma destas duas funções. A função cosseno da Equação 115 é uma solução para o nosso problema, onde A , ω e ϕ são constantes.

$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Sendo que a Equação 115 reflete a posição ao longo do tempo $x(t)$, também nos é possível representar a velocidade $v(t)$ e a aceleração $a(t)$ (Equação 116).

$$v(t) = A \frac{d}{dt}(\cos(\omega t + \phi)) = -\omega A \sin(\omega t + \phi) \quad (1)$$

$$a(t) = -\omega A \frac{d}{dt}(\sin(\omega t + \phi)) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \phi) \quad (2)$$

movimento harmônico simples

equação 112
aceleração revisitada

equação 113
mudança de variável

equação 114
aplicação de mudança de variável

equação 115
movimento harmônico simples (posição)

equação 116
movimento harmônico simples (velocidade e aceleração)

Como já foi designado, A , ω e ϕ são constantes, mas que significado físico é que eles têm? Para dar algum significado físico a estas constantes, primeiro, é mais simples ver graficamente como tudo isto se processa, criando um gráfico com o tempo no eixo dos xx e com a posição no eixo dos yy (Figura 23).

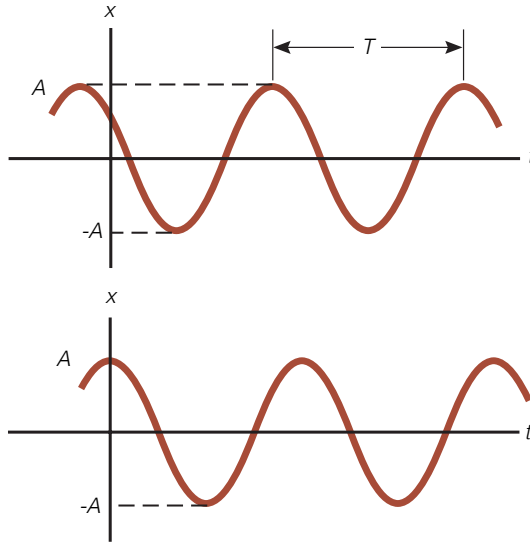


figura 23
movimento harmónico
simples

Começando pela constante A , esta, tem o nome de **amplitude** da onda (do movimento) e é simplesmente o valor máximo da posição da partícula no período do seu movimento, quer seja no sentido positivo ou negativo de x . A constante ω é denominada de **frequência angular** e tem como unidade radianos por segundo. Basicamente o que ela representa é o quão rápido as oscilações ocorrem. Quanto mais oscilações houver por unidade de tempo, maior é o valor de ω . A frequência angular tem expressão na Equação 117.

amplitude

frequência angular

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

equação 117
frequência angular

O ângulo constante ϕ é denominado de **constante fase**. Em conjunto com a amplitude A , a constante fase é determinada pela velocidade e posição da partícula no instante $t = 0$. Na Figura 23 (de baixo) temos o caso de uma onda com constante fase $\phi = 0$. A quantidade $(\omega t + \phi)$ é chamada de **fase** do movimento. Note-se que a função $x(t)$ é uma função periódica e o seu valor permanece igual cada vez que ωt aumenta por 2π radianos.

constante fase

fase

Se investigarmos mais a fundo a descrição matemática do movimento harmónico simples temos que descrever o que é o **período**, representado por T (como na Figura 23 (de cima)). O período T de um movimento é o tempo requerido para a partícula efetuar um ciclo do seu movimento. Como já verificámos antes, o período deste movimento é de 2π radianos, pelo que a expressão do período pode ser descrito pela Equação 118.

período

$$[\omega(t+T) + \phi] - (\omega t + \phi) = 2\pi$$

equação 118
período

Se simplificarmos a expressão em Equação 118 podemos obter a Equação 119.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

equação 119
período

Ao inverso do período damos o nome de **frequência**, f , do movimento (Equação 120).

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

equação 120
frequência

A unidade de frequência é o **Hertz** (Hz). Se rearranjarmos a Equação 120 temos que (Equação 121).

Hertz
© **Heinrich Rudolf Hertz**

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

equação 121
frequência angular revisitada

Tendo a Equação 121 e sabendo que frequência e período são inversos um do outro, temos a Equação 122, que nos permite escrever a frequência e o período com diferentes variáveis, úteis para alguns exercícios.

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \quad (1)$$

equação 122
período e frequência

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2)$$

Energia em movimentos harmônicos simples

Depois de estudamos questões energéticas em movimentos como os já estudados, como é que podemos aplicar as mesmas noções aos movimentos harmônicos simples? Vejamos um caso de análise de energia num sistema mecânico onde uma partícula segue um movimento harmônico simples, como na Figura 18. Porque a superfície não tem atrito, o sistema considera-se isolado, pelo que se espera que a energia mecânica do sistema seja constante. Considerando também uma mola sem massa, a energia cinética do sistema é correspondente à energia cinética do bloco. Pela Equação 116 (1) podemos exprimir a energia cinética do bloco (Equação 123).

$$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \phi)$$

equação 123
energia cinética em MHS

Por outro lado, a energia potencial armazenada na mola por via de qualquer alongamento x é dada por $(1/2)kx^2$. Pela Equação 116 (2) temos que (Equação 124).

$$E_p = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}A^2 \cos^2(\omega t + \phi)$$

equação 124
energia potencial em MHS

41 MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

Tanto E_p como E_c são sempre quantidade nulas ou positivas. Sendo que $\omega^2 = k/m$, podemos exprimir a energia mecânica total do oscilador harmónico simples como a Equação 125.

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}kA^2 [\sin^2(\omega t + \phi) + \cos^2(\omega t + \phi)]$$

equação 125
energia mecânica em MHS

Dado que pela Fórmula Fundamental da Trigonometria, $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$, temos a Equação 126.

$$E = \frac{1}{2}kA^2$$

equação 126
energia mecânica em MHS

3. Campo Eletromagnético

Nesta última unidade começamos o estudo da área do eletromagnetismo. Mas dado que a disciplina em causa continua a ser Mecânica e Campo Eletromagnético (a2s1), isto significa que tem de haver uma relação entre a matéria já estudada e o eletromagnetismo - o eletromagnetismo discute efeitos entre cargas elétricas. Para fazer a transição entre o que já abordámos com esta nova unidade temos que perceber o conceito de força elétrica como resultado da interação de duas cargas elétricas.

Cargas elétricas e força elétrica

Quando pegamos num balão cheio de ar e o raspamos no nosso cabelo seco, ao aproximarmos o balão de pequenos papeis, estes, ficam presos ao balão. Mas porque é que isto acontece? Existe uma força, chamada de **força elétrica**, que permite que tal aconteça. Quando os objetos se comportam desta forma significa que eles estão sujeitos a uma **carga elétrica**.

força elétrica

Numa série de experiências, Benjamin Franklin pôde reparar que havia dois “tipos” de cargas elétricas, às quais lhe deu os nomes de **positivo** e **negativo**. A uma escala atómica o que acontece é que existem eletrões (elementos de carga negativa) e protões (elementos com carga positiva). Como já deve ser do nosso senso comum, duas cargas com o mesmo sinal repelem-se e com sinais oposto atraem-se.

carga elétrica

Uma outra experiência permite-nos garantir que a carga elétrica é sempre conservada, pelo que ao raspamos o balão no nosso cabelo não criamos carga elétrica, antes, carga elétrica é transferida.

positivo, negativo

Em 1909, Robert Millikan descobriu que as cargas elétricas ocorrem sempre como integrais múltiplos de uma quantidade fundamental de carga e . Em termos mais modernos, a carga elétrica q é dita quantificável, onde q é o símbolo convencionado a ser usado para representar uma carga elétrica.

Lei de Coulomb

Como já vimos, as cargas elétricas, ao contrário de outras quantidades físicas como a massa, pode ter significado em dois sinais, quer positivos ou negativos. A **lei de Coulomb** é a lei que nos permite afirmar que a força elétrica entre dois corpos materiais com carga é atrativa (ou repulsiva) para cargas opostas (ou iguais) e dirigida ao longo da linha que une os dois corpos, é proporcional ao produto das massas, q_1 e

lei de Coulomb

© Charles-Augustin de
Coulomb

q_2 , dos corpos e é inversamente proporcional ao quadrado da distância, r , entre eles. A lei de Coulomb está designada na Equação 127.

$$|\vec{F}_e| = k_e \frac{q_1 q_2}{r^2}$$

equação 127
lei de Coulomb

Na Equação 127 estamos presente a uma nova constante, k_e , cujo valor é de $8.9875 \times 10^9 \text{ N.m}^2.\text{C}^{-2}$. Na unidade da constante k_e temos uma nova unidade de medida, o C , que representa o **Coulomb** - unidade do Sistema Internacional de carga elétrica. É frequente escrever o valor de k_e em termos de **permissividade elétrica no vázio**, representada com a letra grega minúscula épsilon, índice zero, ϵ_0 , cujo valor é $8.8542 \times 10^{-12} \text{ C}^2.\text{N}^{-1}.\text{m}^{-2}$ (Equação 128).

Coulomb
permissividade elétrica no vázio

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

equação 128
constante k

Relembra-se que a força elétrica é uma quantidade vetorial que com o desenvolvimento da Equação 128 se pode escrever da seguinte forma (Equação 129).

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_1 q_2}{r^2} \cdot \vec{u}_r$$

equação 129
lei de Coulomb

Caso tenhamos mais do que duas cargas, a lei de Coulomb é passível de ser aplicada, através do conceito de somatório, aplicando-se as alterações visíveis na Equação 130.

$$\vec{F}_e = \sum \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q \cdot q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_{r_i}$$

equação 130
lei de Coulomb (revisitada)

Campo elétrico e lei de Gauss

Da mesma forma que na interação gravitacional foi introduzida a ideia de ação à distância, também foi criado o conceito de **campo elétrico**, pelo que se olharmos para uma determinada carga e a movêssemos ao longo de um determinado espaço, obteríamos forças elétricas diferentes por posições diferentes. O campo elétrico designa-se conforme a Equação 131.

campo elétrico

$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E} \therefore \vec{E} = \sum_i \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q_i}{r_i^2} \cdot \vec{u}_{r_i}$$

equação 131
campo elétrico

Para ser mais fácil a análise de problemas relacionados com campo elétrico, desenvolveu-se uma representação gráfica, a que chamamos de **linhas de campo elétrico**. Para desenhar o campo elétrico é necessário que as linhas que possamos vir a desenhar respeitem normas, de forma a que o conteúdo seja sempre o mais uniformizado possível e legível aos olhos de qualquer pessoa. Sendo assim, eis algumas das regras mais importantes para a representação de linhas de campo elétrico:

linhas de campo elétrico

43 MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

- ▶ as linhas de campo elétrico partem sempre das cargas positivas e terminam nas cargas negativas;
- ▶ a densidade de linhas de campo é proporcional ao campo;
- ▶ as linhas de campo elétrico são sempre contínuas;
- ▶ o campo elétrico é tangente à linha de campo elétrico;
- ▶ as linhas de campo elétrico nunca se cruzam.

Sabendo agora as regras mais importantes para a representação de linhas de campo, desenvolvamos alguns dos exemplos já retratados anteriormente. Sendo assim, comecemos por retratar uma carga isolada, positiva (Figura 24).

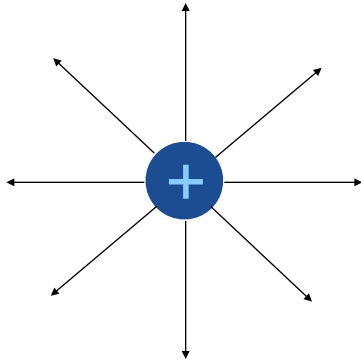


figura 24
campo elétrico por uma carga positiva isolada

Da mesma forma que representamos uma carga isolada positiva, podemos representar uma carga isolada negativa (Figura 25).

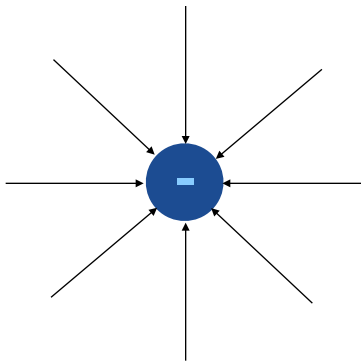


figura 25
campo elétrico por uma carga negativa isolada

Quando temos duas cargas, uma positiva e outra negativa, as linhas de campo são como na Figura 26.

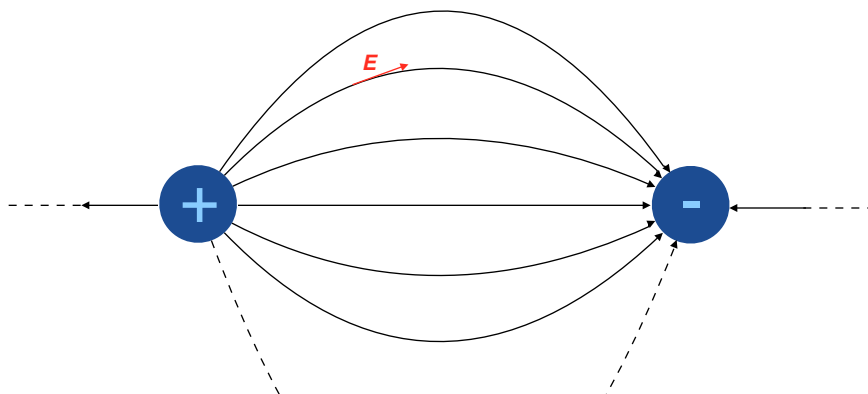


figura 26
campo elétrico por duas cargas opostas

Para desenhar duas cargas com o mesmo sinal há que ter atenção ao facto de elas se repelirem (Figura 27).

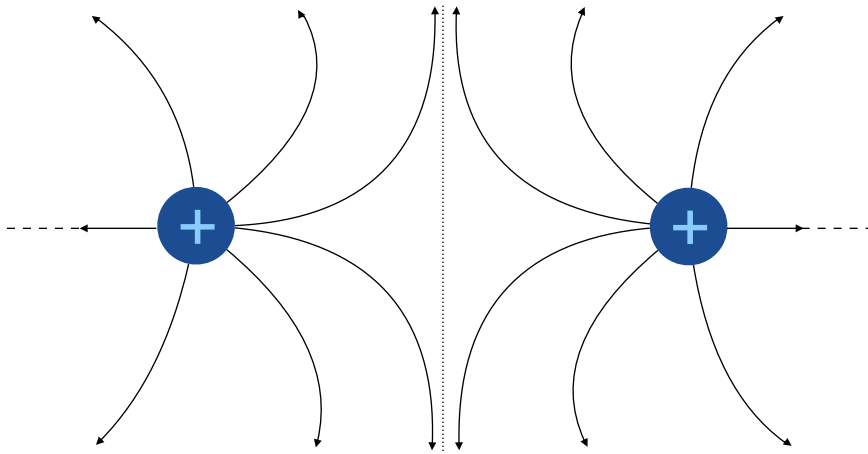


figura 27
campo elétrico por duas
cargas iguais

Até ao momento vimos cargas que se caracterizam por serem pontuais. Mas nem todas as cargas são pontuais. Como serão as linhas de campo elétrico para uma barra cuja carga é positiva e distribuída uniformemente? (Figura 28)

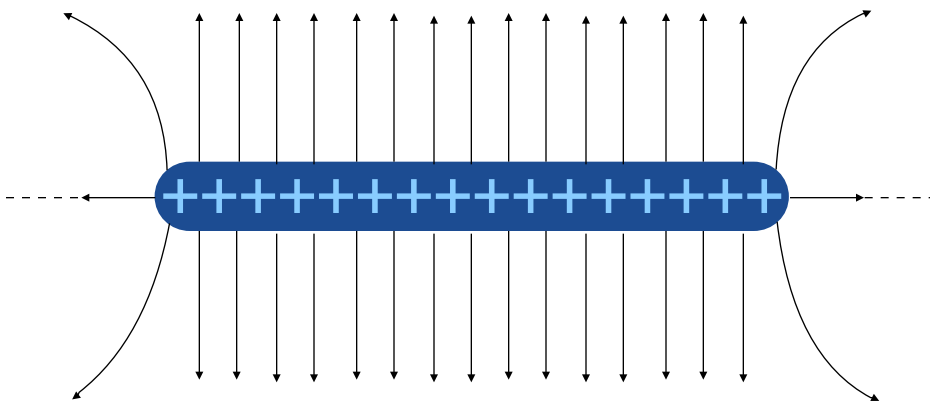


figura 28
campo elétrico por
distribuição uniforme

A teoria do campo elétrico é uma teoria considerada linear, isto é, existe o fenómeno da **sobreposição**. O fenómeno da sobreposição diz-nos que, neste caso, o campo elétrico formado por um conjunto de cargas é a soma dos campos elétricos de cada carga. Deste modo, o campo elétrico num ponto P com vetor posição \vec{r} , gerado pelas cargas elétricas q_1, \dots, q_n , cada uma com vetor posição $\vec{r}_i = \vec{r}(q_i)$, $i = 1, \dots, N$, num determinado referencial é a Equação 132.

sobreposição

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \sum_{i=1}^N \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^2} \cdot \frac{\vec{r} - \vec{r}_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|}$$

equação 132
campo elétrico (revisitado)

Em casos como o da Figura 28 (distribuição contínua de cargas), onde cada elemento tem vetor posição $\vec{r}(q)$, a soma em Equação 132 deve ser substituída pelo integral em Equação 133.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int \frac{\vec{r} - \vec{r}(q)}{|\vec{r} - \vec{r}(q)|^3} dq$$

equação 133
campo elétrico (revisitado)

No integral da Equação 133 a grande dúvida pela resolução de problemas reside no dq . Vejamos a expressão em Equação 133 mais simplificada pela Equação 134.

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \int \frac{dq}{\vec{r}^2} \cdot \vec{u}$$

equação 134
campo elétrico (revisitado)

Dependendo do caso em análise, podemos designar a quantidade dq como uma dada densidade. Numa distribuição **volumétrica** de carga, dq representa-se pela Equação 135 (**densidade volumétrica**).

$$dq = \rho \, dV$$

volumétrica
densidade volumétrica
equação 135
densidade volumétrica

Numa distribuição **superficial** de carga, dq representa-se pela Equação 136 (**densidade superficial**).

$$dq = \sigma \, dS$$

superficial
densidade superficial
equação 136
densidade superficial

Numa distribuição **linear** de carga, dq representa-se pela Equação 137 (**densidade linear**).

$$dq = \lambda \, dl$$

linear
densidade linear
equação 137
densidade linear

Para calcular o campo elétrico de uma distribuição de cargas elétricas tipicamente recorreremos à Equação 133 ou Equação 134 como é o caso da Equação 138, para o caso da Figura 28, considerando o comprimento da barra como L .

$$\vec{E} = \int_0^L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\lambda}{r^2} \vec{u}_r \, dx$$

equação 138
exemplo de aplicação

Existe, para além deste método, um método alternativo e muito mais direto de obter o resultado pretendido, que se torna bastante conveniente em casos com muitas simetrias. Este novo método é denominado de **lei de Gauss**. A lei de Gauss enuncia que o fluxo do campo elétrico através de uma superfície fechada é igual à carga que está no interior dessa superfície a dividir pela constante de permissividade elétrica no vázio. A Equação 139 permite traduzir a lei de Gauss em termos matemáticos.

lei de Gauss

sabendo que: $\vec{E} = \int \frac{k\rho}{r^2} \vec{u}_r \, dV$ temos que: $\int \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$

equação 139
condições para lei de Gauss

Em suma, a lei de Gauss pode ser representada pela Equação 140.

$$\Phi_s(\vec{E}) = \oint_s \vec{E} \cdot \vec{n} \, dS = \frac{q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

equação 140
lei de Gauss

Energia potencial elétrica e potencial elétrico

Como já verificamos anteriormente, a força elétrica é uma **força conservativa**, pelo que conjugando os nossos conhecimentos de termos energéticos podemos dizer que tem uma energia potencial a si relacionada, à qual damos o nome de **energia potencial elétrica**. Para calcular a forma desta energia potencial em particular usamos o resultado obtido atrás, no qual a variação da energia potencial elétrica é igual ao simétrico do trabalho realizado por uma força elétrica externa - devido a outro conjunto de cargas -, para deslocar uma carga q_0 ao longo de um percurso de r_i até r_f , sem variação de energia cinética, como podemos verificar na Equação 141.

$$\Delta E_p = E_p(\vec{r}_f) - E_p(\vec{r}_i) = -W(\vec{F}_e) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{F}_e(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

força conservativa

energia potencial elétrica

equação 141

energia potencial elétrica

Usando a definição de campo elétrico temos a Equação 142.

$$\Delta E_p = -q_0 \int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

equação 142

energia potencial elétrica

Pegando na Equação 142 e convencionando que a energia potencial é igual a zero no infinito, temos a Equação 143, isto é, onde $r_i = \infty$ e $r_f = r$ e onde se muda a variável de integração de r para r' .

$$E_p(\vec{r}) = -q_0 \int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

equação 143

energia potencial elétrica

Sendo assim, podemos agora definir um novo conceito - o de **diferença de potencial elétrico**. A diferença de potencial elétrico é o simétrico do trabalho por unidade de carga utilizada por uma força elétrica externa, de forma a deslocar a carga q_0 ao longo de um percurso de r_i até r_f , sem variação de energia cinética. A unidade de SI do **potencial elétrico** é o Volt (V) que é equivalente ao Joule/Coulomb. Dado isto, a diferença de potencial entre dois pontos é expressida pela Equação 144.

diferença de potencial elétrico

potencial elétrico

⊙ **Alessandro Volta**

$$\Delta V = V(\vec{r}_f) - V(\vec{r}_i) = -\int_{\vec{r}_i}^{\vec{r}_f} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$$

equação 144

diferença de potencial

Mais uma vez, pegando na Equação 144 e convencionando que a energia potencial é igual a zero no infinito, temos a Equação 145, isto é, onde $r_i = \infty$ e $r_f = r$ e onde se muda a variável de integração de r para r' .

$$V(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}') \cdot d\vec{r}'$$

equação 145

diferença de potencial

Usando o operador **gradiente**, dado o desenvolvimento por derivadas parciais da Equação 145, temos a Equação 146.

gradiente

$$E = -\nabla V$$

equação 146

relação energia-diferença de potencial

A relação em Equação 146 é de extrema importância, pelo que mostra como o campo elétrico se encontra totalmente mapeado numa grandeza escalar, esta,

denominada de potencial elétrico. Dado que se torna mais simples compreender um campo escalar a um campo vetorial, esta relação torna-se vital para o desenvolvimento energético e interpretação desta génese de problemas.

Condutores

O que é um material **condutor**? A palavra ‘condução’ induz, logo de imediato, movimento. Deste modo, um material condutor é qualquer material que se caracterize com conter cargas que se movem livremente.

Partindo de condutores carregados, em equilíbrio eletrostático, estes têm algumas propriedades, entre as quais as cargas distribuírem-se na superfície exterior do condutor, o campo elétrico à superfície, por sua vez, ser perpendicular à mesma, traduzindo-se numa **superfície equipotencial** ou o facto do campo elétrico ser nulo no seu interior, o que, por conseguinte, provoca que o potencial elétrico seja constante no mesmo meio e com o mesmo valor que tem à superfície.

Uma simples aplicação da lei de Gauss é capaz de demonstrar que o campo elétrico de uma esfera condutora, com raio a e carga Q é igual à Equação 147.

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \vec{u}_r, \quad \text{se } r > a, \quad \vec{E} = 0, \quad \text{se } r < a$$

condutor

superfície equipotencial

equação 147

exemplo de aplicação

Aplicando a Equação 145 na Equação 147 temos a Equação 148.

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r}, \quad \text{se } r \geq a, \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{a}, \quad \text{se } r \leq a$$

equação 148

exemplo de aplicação

Pela Equação 148 podemos verificar que a razão entre a carga e o potencial elétrico na superfície do condutor é uma constante independente da carga, pelo que é visível na Equação 149.

$$\left(\frac{Q}{V} \right)_{\text{esfera condutora}} = 4\pi\epsilon_0 a$$

equação 149

exemplo de aplicação

A independência da carga resulta do facto do potencial ser proporcional à carga, pelo que isto é um facto em comum com todos os condutores carregados, qualquer que seja a sua forma geométrica. Sendo assim esta razão é definida como sendo a **capacidade elétrica** de um condutor isolado, denotada por C (Equação 150).

capacidade elétrica

$$C = \frac{Q}{V}$$

equação 150

capacidade elétrica

A capacidade elétrica, como definida pela Equação 150, é sempre positiva, com unidade SI abreviada de F , de nome **Farad**. Um Farad é a capacidade de um condutor isolado, cujo potencial elétrico, depois de receber a carga de um Coulomb, é um Volt.

Farad

© **Michael Faraday**

Se extendermos este conceito para um sistema de dois condutores isolados - sistema vulgarmente conhecido por **condensador** -, e se estes tiverem, respetivamente, cargas Q e $-Q$, com potenciais superficiais de V_1 e V_2 , a capacidade do condensador é definida como a razão entre Q e a diferença de potencial, de modo a que C seja positiva, como podemos ver na Equação 151.

condensador

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2}$$

equação 151
capacidade (revisitada)

A capacidade de um condensador depende apenas da forma dos seus condutores, tal como da sua posição relativa e do meio material presente entre eles.

Associação de condensadores

Os condensadores, como constituintes elétricos, podem ser associados em **série** ou em **paralelo**. Se ligarmos dois condensadores em série, como na Figura 29, cada um com capacidade C_1 e C_2 .

série
paralelo

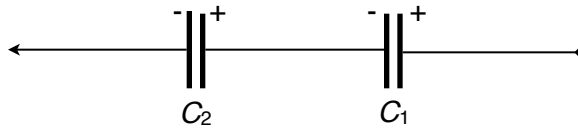


figura 29
condensadores ligados em série

Nesta associação, a placa positiva do condensador 1 está ligada ao fio de entrada do circuito, a placa negativa do condensador 1 está ligada à placa positiva do condensador 2 e a placa negativa do condensador 2 está ligada ao fio de saída do circuito elétrico.

Na Figura 30 está representado dois condensadores associados em paralelo.

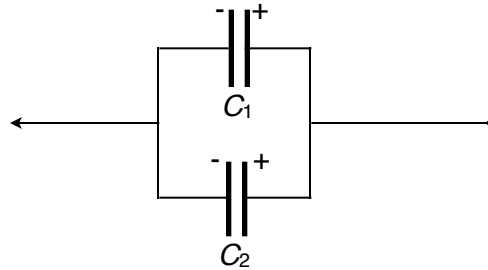


figura 30
condensadores ligados em paralelo

Mas afinal qual é a capacidade equivalente entre o fio de saída e entrada, se houvesse apenas um condensador entre eles? Foquemos a nossa atenção nas placas mais internas dos condensadores da Figura 29, isto é, da placa positiva do condensador 2 e da placa negativa do condensador 1. Estas placas estão fisicamente desconexas do resto do circuito, pelo que a carga total que nelas existe deve manter-se constante e independente da diferença de potencial elétrico aplicada em cada um deles. É razoável admitir que estes pratos têm carga nula quando a diferença de potencial elétrico aplicada em cada um deles é nula. Logo, quando uma diferença de potencial é aplicada em cada um deles, a carga de um deve ser oposta à carga do outro, dado que a placa negativa do condensador 1 adquire carga $-Q$ e a placa positiva do condensador 2 adquire carga $+Q$. Por conseguinte, a placa positiva do condensador 1 tem carga $+Q$ e a placa negativa do condensador 2 tem carga $-Q$. As diferenças de potencial que ocorrem em cada um dos condensadores serão genericamente diferentes, sendo elas, respetivamente, V_1 e V_2 . A diferença entre os fio de entrada e de saída será então $V = V_1 + V_2$, pelo que a capacidade equivalente será a refletida na Equação 152.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{Q} = \frac{V_1}{Q} + \frac{V_2}{Q} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

equação 152
capacidade equivalente

De forma genérica, para um sistema de n condensadores ligados em série, com capacidades C_i , a capacidade equivalente será a expressa na Equação 153.

$$\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i}$$

equação 153
capacidade equivalente
(geral)

Considerando a associação da Figura 30, temos uma situação em que as placas positivas de todos os componentes são ligadas a um ponto comum, tal como as negativas, pelo que a diferença de potencial será a mesma para todos os condensadores. Se o condensador i acumula carga $\pm Q_i$ nas placas positiva e negativa e tem capacidade C_i , como na Equação 154.

$$Q_1 = C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V$$

equação 154
exemplo de aplicação

Dada a Equação 154, a carga total das cargas positivas e negativas, que liga o fio de entrada e saída é dada pela Equação 155.

$$Q = Q_1 + Q_2 = (C_1 + C_2)V$$

equação 155
exemplo de aplicação

O condensador equivalente que acumula carga Q mediante a diferença de potencial elétrico de V tem capacidade expressa na Equação 156.

$$C = C_1 + C_2$$

equação 156
exemplo de aplicação

Mais uma vez, de forma genérica, para um sistema de n condensadores ligados entre si de forma paralela, com capacidades C_i , a capacidade equivalente será dada pela Equação 157.

$$C_{eq} = \sum_{i=1}^n C_i$$

equação 157
capacidade equivalente

Para carregar um condutor temos de despende energia, pelo que ao trazer novas cargas para o condutor vai ser necessário fazer um trabalho para superar a repulsão do excesso de carga que já lá está presente. Esse trabalho aumenta a energia potencial elétrica do condutor. Se considerarmos um condutor com carga genérica q e capacidade C , este tem potencial elétrico de $V = q/C$, embora se adicionarmos um elemento de carga dq desde o infinito, o trabalho a realizar já será igual à variação da energia potencial elétrica devida às cargas que já estavam no condutor, pelo que se valida a Equação 158.

$$dE_p = dW = Vdq = \frac{q}{C}dq$$

equação 158
relação entre variação de
energia potencial, carga,
trabalho e capacidade

De forma a obter a energia potencial elétrica armazenada no condutor considerado de capacidade C podemos integrar a variação de carga desde zero até à carga final do condutor Q (Equação 159).

$$E_p = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}$$

equação 159
energia potencial

Uma outra forma também válida é substituindo a carga total no condensador pela diferença de potencial elétrico aplicada, de forma a obter uma fórmula para a energia potencial armazenada num condutor com capacidade C e submetido a uma diferença de potencial V (Equação 160).

$$E_p = \frac{1}{2} CV^2$$

equação 162
intensidade média

De forma a obter a Equação 159 e a Equação 160 apenas foi necessário invocar a capacidade do condutor (ou o seu potencial) e a carga transportada. Sendo assim, estas fórmulas aplicam-se também a um condensador, dado que para o formar é necessário transportar uma carga Q da placa negativa para a positiva e reinterpretar o potencial V do condutor como a diferença de potencial entre as placas do condensador, que é exatamente o que entra na capacidade do condensador. Existe assim uma relação importante entre esta energia potencial elétrica de um condutor carregado e o campo elétrico produzido em todo o espaço por esse condutor. De forma a podermos compreender vejamos um caso específico, de uma esfera condutora com raio a , pelo que a sua capacidade será $C = 4\pi\epsilon_0 a$. Logo, a sua energia potencial é definida pela Equação 161.

equação 160
energia potencial (revisitada)

$$E_p = \frac{1}{2} \left(\frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 a} \right)$$

Dada a Equação 161 e através de uma interpretação com coordenadas esféricas podemos obter uma comparação na qual, embora derivada de um caso em particular tem uma validade bem mais geral. Sendo assim, a energia potencial elétrica armazenada num sistema de cargas relaciona-se com o integral sobre todo o espaço do quadrado do campo elétrico desta forma, pelo que podemos afirmar que a **densidade de energia potencial** elétrica no campo é igual à Equação 162.

$$\rho E_p = \frac{1}{2} \epsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{E}$$

densidade de energia
potencial

equação 161
energia potencial (revisitada)

Corrente elétrica e resistência

Dado o nosso conhecimento esta é uma boa oportunidade de introduzir um novo conceito - o de corrente elétrica. A **corrente elétrica** consiste num fluxo de partículas carregadas (elétrões ou iões). Uma corrente é produzida, por exemplo, quando se aplica um campo elétrico num metal, em que partículas carregadas se podem mover, fornecendo ao campo externo uma direção muito bem definida a este movimento.

corrente elétrica

Uma grandeza passível de ser calculada é a **intensidade de corrente elétrica**, denotada por I , sendo esta definida como a carga elétrica ΔQ que passa num intervalo de tempo Δt através de uma secção de área perpendicular ao fluxo da carga. Uma

intensidade de corrente
elétrica

forma de calcular é através da sua média - como é possível verificar na Equação 163 - ou através da sua forma instantânea - como na Equação 164.

$$I_{\text{média}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

equação 163
intensidade média

$$I = \frac{dQ}{dt}$$

equação 164
intensidade instantânea

A intensidade de corrente elétrica tem como unidade SI o **Ampere**, dentada de A , unidade que equivale ao Coulomb por segundo, C/s . Por convenção a corrente elétrica tem o sentido do movimento das cargas positivas, pelo que o sentido real da corrente é oposto ao sentido convencional.

Ampere
© André-Marie Ampère

Acelerando um conjunto de cargas para originar uma corrente elétrica requer, claramente, energia. Mas qual será a energia necessária para manter uma corrente elétrica com intensidade I ? Se considerarmos que um intervalo de tempo Δt , n partículas carregadas com carga q são aceleradas por uma diferença de potencial V , temos que a energia transmitida a cada carga é de qV , pelo que a potência transmitida às cargas é representada pela Equação 165.

$$P = \frac{nqV}{\Delta t} = VI$$

equação 165
potência transmitida

Em suma, a potência necessária para manter uma corrente de intensidade I através de uma diferença de potencial V é o produto da diferença de potencial pela intensidade de corrente elétrica.

Quando um campo elétrico externo é aplicado a um material dielétrico, este material fica **polarizado**. Mas quando o campo externo é aplicado a uma região onde existem cargas livres, como num condutor, estas cargas serão postas em movimento e produzirão uma corrente elétrica, ao invés de polarizar o meio. Sendo assim, existe aqui um importante facto experimental, ao qual fundamentamos como a **lei de Ohm**. Esta lei enuncia-se da seguinte forma: para um condutor metálico, à temperatura ambiente, a razão entre a diferença de potencial V entre dois pontos e a intensidade de corrente I é uma constante. A lei de Ohm pode ser verificada na Equação 166 e trata de uma constante denominada de **resistência elétrica**, representada pela letra R .

polarizado
lei de Ohm
© Georg Simon Ohm
resistência elétrica

$$R = \frac{V}{I} \therefore V = RI$$

equação 166
lei de Ohm

A unidade do Sistema Internacional de Medidas para a resistência elétrica é o **Ohm**, que equivale ao volt por ampere, abreviado pela letra maiúscula grega omega: Ω .

Ohm

Condutividade e resistividade

A lei de Ohm pode ser reescrita de várias formas para um material em concreto. Consideremos assim um condutor cilíndrico de comprimento l e uma secção sua reta A . Podemos definir a **densidade de corrente** como sendo a intensidade de corrente por unidade de área, denotada pela letra j , cujas unidades são o ampere por metro quadrado. Por outro lado, admitindo que o campo elétrico ao longo do condutor

densidade de corrente

é uniforme, com magnitude E , podemos escrever que a diferença de potencial entre dois pontos é $V = lE$, pelo que a lei de Ohm pode ser escrita como na Equação 167, onde definimos a quantidade representada pela primeira letra minúscula grega sigma, σ , a qual é igual a $\sigma = l / RA$, denominada de **condutividade elétrica do material**, cujas unidade é o $\Omega^{-1} \cdot m^{-1}$. Numa equação vetorial é possível apresentar a Equação 167, onde o vetor densidade de corrente é definido como tendo a direção da corrente elétrica.

$$\vec{j} = \sigma \vec{E}$$

A Equação 168 deve ser vista como uma forma alternativa da lei de Ohm, pelo que a corrente elétrica tem direção e sentido do campo elétrico e proporcional ao campo e à condutividade do material. Por conseguinte, a lei de Ohm pode ser reescrita da forma em Equação 168, onde $\rho = 1/\sigma$ é denominada de **resistividade elétrica do material**, cuja unidade SI é o $\Omega \cdot m$.

$$\vec{j} = \frac{1}{\rho} \vec{E}$$

Da definição de condutividade e de resistividade podemos concluir a Equação 170.

$$R = \rho \frac{l}{A}$$

Existe uma conclusão interessante que pode ser retirada da lei de Ohm, escrevendo o vetor densidade de corrente para uma corrente de elétrons (carga $q = -e$) com velocidade v como $j = -env$, onde n é o número de elétrons (condutores) por unidade de volume, obtemos a Equação 170.

$$\vec{j} = -\frac{\sigma}{en} \vec{E}$$

Os elétrons de condução no metal atingem uma velocidade constante. Contudo, poderíamos esperar que, dado estarem num campo elétrico uniforme, tivessem uma aceleração - e não velocidade - constante. Esta situação tem alguma analogia com a queda de um corpo na Terra. Sem atrito viscoso - de um fluido - o corpo tem uma aceleração constante, embora na presença de atrito viscoso o corpo atinge uma velocidade limite. Por analogia podemos pensar que a interação dos elétrons condutores com a rede cristalina origina a força de atrito viscoso que leva a um regime de velocidade limite ser atingido. A consequente **dissipação de energia** - transferência de energia dos elétrons condutores para a rede cristalina - leva a um aumento de temperatura do material. A isto denominamos de **efeito de Joule**. Esta é a razão pela qual é necessário transmitir uma potência para manter uma corrente num condutor com uma certa diferença de potencial aplicada. Se o condutor é um material Ohmico, então essa potência pode ser reescrita como na Equação 171.

$$P = RI^2 = \frac{V^2}{R}$$

condutividade elétrica do material

equação 167
vetor densidade de corrente

resistividade elétrica do material

equação 168
vetor densidade de corrente
(revisitado)

equação 169
resistência (revisitado)

equação 170
vetor densidade de corrente
(revisitado)

dissipação de energia

efeito de Joule

equação 171
potência

Associação de resistências

Da mesma forma que vimos para o caso da associação de condensadores, também as resistências podem ser associadas em série ou em paralelo, colocando-se a questão de qual a resistência equivalente, isto é, a resistência que, substituindo a associação, origina a mesma intensidade de corrente para a mesma diferença de potencial aplicada.

Consideremos uma associação em série de duas resistências, como podemos ver na Figura 31.

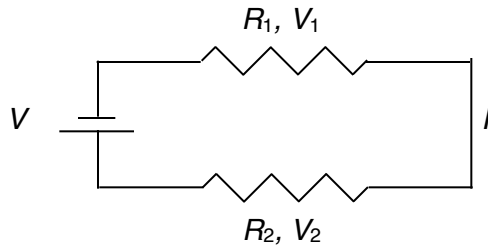


figura 31
resistências ligadas em série

A corrente no circuito é I e a diferença de potencial real nos terminais da bateria é V . Sejam V_1 e V_2 as diferenças de potencial nos terminais das resistências R_1 e R_2 , respetivamente, obtendo a Equação 172.

$$V = V_1 + V_2 = R_1 I + R_2 I = (R_1 + R_2) I = R_{eq} I$$

equação 172
exemplo de aplicação

Logo, a resistência equivalente é simplesmente a soma das resistências (Equação 173).

$$R_{eq} = R_1 + R_2$$

equação 173
exemplo de aplicação

De forma mais geral, na associação de n resistências R_i em série temos que a resistência equivalente é calculada através de Equação 174.

$$R_{eq} = \sum_{i=1}^n R_i$$

equação 174
resistência equivalente

Consideremos agora uma associação de resistências em paralelo como na Figura 32

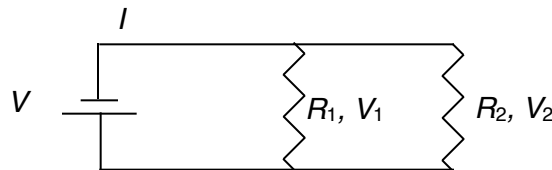


figura 32
resistências ligadas em paralelo

Neste caso a intensidade de corrente divide-se pelas duas resistências. Seja I_1 e I_2 a intensidade de corrente que percorre a resistência R_1 e R_2 , respetivamente. Logo, a intensidade de corrente total antes da divisão é $I = I_1 + I_2$. Por outro lado, a diferença de potencial será a mesma nos terminais de ambas as resistências, que denotamos por V . Assim, pela lei de Ohm, temos a Equação 175.

$$V = R_1 I_1, \quad V = R_2 I_2$$

equação 175
exemplo de aplicação

Logo, para a resistência equivalente termos a Equação 176.

$$\frac{V}{R_{eq}} = I = I_1 + I_2 = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2}$$

equação 176
exemplo de aplicação

Pela Equação 176 temos que o inverso da resistência equivalente é a soma dos inversos das resistências individuais. Assim, de forma geral, num associação de n resistências em paralelo, a resistência equivalente é representada pela Equação 177.

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{R_i}$$

equação 177
resistência equivalente

Força eletromotriz

Considerando um circuito elétrico com uma bateria e uma resistência, como representado na Figura 33, designamos por **força eletromotriz**, abreviada pela letra grega minúscula epsilon ϵ , a diferença de potencial teórica entre os extremos da bateria (ou seja, entre os pontos A e B da Figura 33): $\epsilon = V_B - V_A$.

força eletromotriz



figura 32
circuito com resistências

nota!! a força eletromotriz não tem unidades de força, dado que é uma diferença de potencial.

nota

Usando a lei de Ohm, a intensidade de corrente no circuito deve ser proporcional a ϵ , sendo a constante de proporcionalidade o inverso da resistência total. Contudo, a bateria também tem uma resistência interna, que denotamos por r . Portanto, pela secção anterior, a resistência equivalente do circuito é $r + R$, pelo que, aplicando a lei de Ohm, a intensidade da corrente será a Equação 178.

$$I = \frac{\epsilon}{r + R}$$

equação 178
intensidade

A Equação 178 faz com que a diferença de potencial real medida nos terminais da resistência R (entre os pontos C e D da Figura 33), que é $V = RI$, será, em termos da força eletromotriz, a Equação 179.

$$V = \epsilon - rI$$

equação 179
diferença de potencial

A Equação 179 transmite também a diferença de potencial medida nos terminais da bateria (entre os pontos A e B) e será sempre menor que a força eletromotriz.

Leis de Kirchhoff

Sem saber, em considerações já feitas anteriormente usámos as **leis de Kirchhoff**, pelo que estas leis expressam a conservação da carga elétrica e da energia num circuito elétrico. Enunciando, num circuito elétrico a soma das correntes que entram numa junção é igual à soma das correntes que saem da junção (Equação 180) - conservação da carga elétrica -, e a soma das diferenças de potencial através de todos os elementos num circuito fechado é zero (Equação 181).

$$\sum I_{\text{entrada}} = \sum I_{\text{saída}}$$

$$\sum_{\text{circuito}} \Delta V = 0$$

leis de Kirchhoff

© **Gustav Kirchhoff**

equação 180

lei de Kirchhoff (1 de 2)

equação 181

lei de Kirchhoff (2 de 2)

Campo magnético

Até ao momento temos vindo a discutir cargas ou mesmo objetos neutros com dipolo elétrico, que geram campo elétrico. Mas existe outro tipo de interações à distância, intimamente relacionada com a interação elétrica, mas com propriedades bastantes distintas, denominada de **interação magnética**. O exemplo mais familiar da interação magnética é um **ímã**. Um ímã atrai pequenos objetos metálicos, como por exemplo pedaço de limalha de ferro. Neste caso a interação magnética resulta por o ímã ser um **dipolo magnético** permanente e macroscópico. A origem deste dipolo magnético permanente, tal como no caso do dipolo elétrico, está na sua estrutura microscópica, mas essa discussão está fora da área desta disciplina.

interação magnética

ímã

dipolo magnético

Lei de Biot-Savart e força de Lorentz

Uma carga elétrica gera um campo elétrico. Em rigor, esta lei apenas é verdade no âmbito da eletrostática, isto é, quando todas as cargas estão em repouso relativamente a um referencial inercial, sendo uma boa aproximação quando todas as velocidades são muito pequenas comparadas com a velocidade da luz.

No caso da interação magnética verifica-se experimentalmente o seguinte facto: uma carga elétrica Q , em movimento com velocidade \mathbf{v} , produz um campo magnético que é dado pela **lei de Biot-Savart**. Assumindo que a carga está na origem (num dado instante de tempo), o campo magnético produzido no ponto com vector posição $\mathbf{r} = r\mathbf{u}_r$ é dado pela Equação 182.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \cdot \frac{\vec{v} \times \vec{u}_r}{r^2}$$

Na Equação 183 introduz-se então uma nova constante, denominada de **permeabilidade magnética do vazio**, cujo valor é dado pela Equação 183, onde T abrevia a unidade SI do campo magnético - o **Tesla**.

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ T.m.A}^{-1}$$

lei de Biot-Savart

© **Jean-Baptiste Biot**

© **Félix Savart**

equação 182

campo magnético

permeabilidade magnética do vazio, Tesla

© **Nikola Tesla**

equação 183

perm. magnética do vazio

A fórmula em Equação 182 deve ser usada com algum cuidado, dado que em rigor, esta será apenas verdadeira na magnetostática, isto é, em situações onde as correntes de carga sejam estacionárias. Ou seja, ao escrevermos tal fórmula estamos a assumir que em todos os instantes existe uma carga na origem com velocidade \mathbf{v} . Por esta razão a lei de Biot-Savart é geralmente escrita em termos da intensidade de corrente I , associada a uma corrente de cargas e não à velocidade \mathbf{v} de uma única carga. Para sermos concretos, consideremos uma carga de corrente I na direção do versor $d\mathbf{S}$. O campo magnético total no ponto com vetor posição \mathbf{r} é obtido somando a contribuição de cada elemento de corrente, cujo vetor posição é \mathbf{r}' , como é visível na Equação 183, onde o integral é sobre toda a corrente, notando-se que $\int |d\mathbf{S}|$ é o comprimento do fio (Equação 184).

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\text{corrente}} \frac{d\vec{S} \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

equação 184
campo magnético
(revisitado)

Uma diferença fundamental entre o campo elétrico gerado por cargas e o campo magnético gerado por correntes está na direção. O campo elétrico diverge das cargas positivas e converge para as cargas negativas. Por outro lado, o campo magnético circula em torno das correntes, o que matematicamente está codificado no produto vetorial.

Também, tal como para o campo elétrico, o campo magnético cai com o inverso do quadrado da distância ao elemento de corrente e é proporcional ao elemento de corrente, sendo agora a constante de proporcionalidade igual a $\mu_0/4\pi$, por contraste a $1/4\pi\epsilon_0$ no caso do campo elétrico.

Tal como uma carga elétrica na presença de um campo elétrico sente uma força elétrica, dada pela lei de Coulomb, uma carga em movimento ou uma corrente elétrica na presença de um campo magnético também sente uma força. Esta força é a **força de Lorentz**. Para o caso de uma carga q que se movimenta com uma velocidade \mathbf{v} na presença de um campo magnético \mathbf{B} , esta força é dada pela Equação 185.

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$$

força de Lorentz
© Hendrik Lorentz

equação 185
força de Lorentz

Indução eletromagnética

Até agora vimos que as cargas geram divergência ou convergência do campo elétrico e que as correntes geram circulação do campo magnético. Sendo assim, podemos perguntar se existe alguma forma de gerar divergência ou convergência para o campo magnético e gerar circulação para o campo elétrico. Relativamente à primeira parte da questão, as leis do eletromagnetismo estabelecem que é impossível gerar convergência ou divergência para o campo magnético, pois para tal seria necessária a existência de cargas - por outras palavras monopolos magnéticos. Mas não existe qualquer evidência que tais monopolos magnéticos existam na Natureza.

Em relação à segunda parte da questão, as leis do eletromagnetismo de facto estabelecem que é possível gerar circulação do campo elétrico na presença de campos magnéticos variáveis no tempo. Este é um exemplo de um fenómeno de **indução eletromagnética**, isto é, em que um campo magnético, com certas propriedades, pode induzir um campo elétrico, ou vice-versa. A existência destes fenómenos de indução é

indução eletromagnética

uma manifestação clara que campos elétricos e magnéticos são duas formas de uma única entidade: o **campo eletromagnético**.

campo eletromagnético

Lei de Faraday

O fenómeno de indução da circulação do campo elétrico por um campo magnético variável é descrito pela **lei de Faraday**. Consideremos um circuito elétrico. Para existir corrente elétrica tem de existir primeiro força eletromotriz, ou seja, uma diferença de potencial entre partes do circuito. Como o campo elétrico é o gradiente do potencial elétrico, isto significa que tem de existir um campo tangente ao circuito, ou seja, tem de existir circulação do campo elétrico. Se um circuito elétrico for colocado na presença de um campo magnético estático, por exemplo um íman em repouso, nenhuma corrente elétrica é gerada no circuito. Mas se a posição do íman for variada relativamente ao circuito, verifica-se experimentalmente que é gerada uma corrente no circuito. Quantitativamente esta indução é descrita pelo enunciado de que a força eletromotriz ε induzida circuito é proporcional à taxa de variação temporal do fluxo magnético através do circuito $\Phi_S(\mathbf{B})$ (Equação 186), onde S é a superfície delimitada pelo circuito.

lei de Faraday

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi_S(\vec{B})}{dt}, \quad \text{onde} \quad \Phi_S(\vec{B}) = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n} dA$$

equação 186
lei de Faraday

nota!! o fluxo magnético tem unidades SI de **Weber**, abreviado de Wb, sendo este equivalente a T.m².

nota, Weber

Na Equação 186, o sinal negativo da lei de Faraday expressa a **lei de Lenz**, a qual enuncia que a polaridade da força eletromotriz é tal que a corrente elétrica induzida cria, por sua vez, um fluxo de campo eletromagnético que se opõe à variação original do fluxo do campo magnético indutor.

© **Wilhelm Weber**
lei de Lenz

© **Heinrich Lenz**

E assim terminam os apontamentos da disciplina de Mecânica e Campo Eletromagnético (a2s1).

1. Fundamentos de Mecânica Clássica

Cinemática da partícula	2
Posição e trajetória	2
Deslocamento e distância percorrida	3
Velocidade instantânea e média	5
Aceleração média e instantânea	5
Movimento retilíneo e uniforme	6
Lançamento de projéteis	7
Movimento Curvilíneo	11
Aceleração tangencial e normal	14
Conceptualização de força	15
Leis de Newton	16
Forças de Atrito	18
Energia de um sistema	20
Trabalho realizado por uma força constante	21
Trabalho realizado por uma força não constante	21
Trabalho realizado por uma mola	22
Energia cinética e teorema do trabalho-energia	24
Energia potencial de um sistema	25
Potência	26
Momento linear	27
Momento linear num sistema não isolado	31
Colisões unidirecionais	32
Centro de massa	33
Rotação de objetos rígidos sobre um eixo	34
Posição, velocidade e aceleração angular	34
Momento angular, da força e de inércia	36

2. Sistemas Oscilatórios

Movimento harmónico simples	38
Energia em movimentos harmónicos simples	40

3. Campo Eletromagnético

Cargas elétricas e força elétrica	41
Lei de Coulomb	41
Campo elétrico e lei de Gauss	42
Energia potencial elétrica e potencial elétrico	46
Condutores	47
Associação de condensadores	48
Corrente elétrica e resistência	50
Condutividade e resistividade	51
Associação de resistências	53
Força eletromotriz	54
Leis de Kirchhoff	55
Campo magnético	55
Lei de Biot-Savart e força de Lorentz	55
Indução eletromagnética	56
Lei de Faraday	57

Apontamentos de Mecânica e Campo Eletromagnético

1ª edição - janeiro de 2015



Autor: Rui Lopes

Fontes bibliográficas: Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics, SERWAY, R.A.; Física um curso universitário, ALONSO & FINN; The physics of Vibrations and Waves, PAIN, H.J.

Outros recursos: Notas de Mecânica e Campo Eletromagnético; Videoaulas por Professor Carlos Herdeiro.

Agradecimentos: Professor Luis Miguel Almeida.

Todas as ilustrações gráficas são obra de Rui Lopes e as imagens são provenientes das fontes bibliográficas divulgadas.



apontamentos

© Rui Lopes 2015 Copyright: Pela Creative Commons, não é permitida a cópia e a venda deste documento. Qualquer fraude será punida. Respeite os autores e as suas marcas. Original - This work is licensed under the Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivatives 4.0 International License. To view a copy of this license, visit http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/deed.en_US.