Teste N.º 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: __ Turma: ___

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi\, r\, g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\,\pi\, r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3}\times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\,\pi\, r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\,\cos b+\operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n=\rho^n\, e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho\, e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$ $\quad$ ($k\in\{0,\ldots,n-1\}$ e $n\in\mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(u\,v)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-u\,v'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}\,u'\,(n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\ln a\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad(n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad(p\in\mathbb{R})$

1. Um hotel do centro da cidade do Porto, que promove atividades turísticas, é procurado por turistas de várias nacionalidades.

Num certo dia, o hotel organizou uma visita ao Palácio da Bolsa e uma viagem de barco rabelo no rio Douro. Sabe-se que:

- 50% dos hóspedes participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro;
- 10% dos hóspedes que participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro não participaram na visita ao Palácio da Bolsa;
- 20% dos hóspedes não participaram na visita ao Palácio da Bolsa nem participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro.

1.1. Nesse dia, escolheu-se, ao acaso, um dos hóspedes do hotel e verificou-se que tinha participado na visita ao Palácio da Bolsa.

Qual é a probabilidade de o hóspede escolhido não ter participado na viagem de barco rabelo no rio Douro? Apresente o resultado sob a forma de percentagem.

1.2. Nesse dia, escolheu-se, ao acaso, uma comissão constituída por dois hóspedes desse hotel. Sabe-se que a probabilidade de a comissão escolhida ser constituída por hóspedes que não participaram em nenhuma das duas atividades é igual a $\frac{3}{95}$.

Seja n o número total de hóspedes desse hotel.

Determine o valor de n.

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação, sem utilizar a calculadora, a não ser para efetuar eventuais cálculos numéricos.

2. Seja S, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(B) \neq 0$
- $P(A|B) = \frac{5}{6}$
- $P(\bar{A} \cup \bar{B}) = 3P(A \cap B)$

Qual é o valor de $P(\bar{A} \cap B)$?

(A) $0{,}05$

(B) $0{,}1$

(C) $0{,}25$

(D) $0{,}6$

3. Num encontro de antigos elementos de uma determinada universidade participaram 55 pessoas: 40 antigos alunos, 10 antigos professores e 5 antigos funcionários.

3.1. Para organizar o próximo encontro, foram sorteados os nomes de seis destes participantes aleatoriamente.

Qual é a probabilidade de terem sido selecionados pelo menos dois antigos professores?

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

3.2. Para tirar uma fotografia de grupo, todos os participantes se distribuíram por quatro filas e colocaram-se lado a lado. De quantas maneiras se podem colocar todos os participantes de modo que nas duas filas de trás fiquem apenas antigos alunos (20 em cada fila), na fila seguinte fiquem todos os professores e na primeira fila fiquem os antigos funcionários?

(A) ${}^{40}A_{20} \times 10! \times 5!$

(B) $(20!)^2 \times 10! \times 5!$

(C) $2 \times 20! \times 10! \times 5!$

(D) ${}^{40}C_{20} \times (20!)^2 \times 10! \times 5!$

3.3. Considere a experiência aleatória que consiste em escolher, ao acaso, cinco desses cinquenta e cinco participantes.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "Exatamente três dos participantes escolhidos são antigos professores."

B: "Pelo menos um dos participantes escolhido é antigo aluno."

Determine, sem usar a fórmula da probabilidade condicionada, o valor de $P(A|\overline{B})$.

Numa pequena composição, justifique a sua resposta.

Na sua resposta, deve:

- explicar o significado de $P(A|\bar{B})$ no contexto do problema;
- fazer referência à regra de Laplace;
- explicar o número de casos possíveis;
- explicar o número de casos favoráveis;
- apresentar o valor de $P(A|\bar{B})$ na forma de fração irredutível.

4. Uma certa linha do triângulo de Pascal tem 2024 elementos.

Escolhendo, ao acaso, dois elementos desta linha, qual é a probabilidade de o seu produto ser 2023?

(A) $\frac{4}{2\,045\,253}$ **(B)** $\frac{8}{2\,045\,253}$ **(C)** $\frac{1}{511\,819}$ **(D)** $\frac{2}{511\,819}$

5. O Pedro tem na mochila cromos da coleção oficial do campeonato do mundo de futebol Qatar 2022.

Os cromos são todos indistinguíveis ao tato e o Pedro só tem na mochila cromos de dois tipos: x cromos da seleção de futebol de Portugal e y cromos da seleção de futebol do Brasil.

Retiraram-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, dois cromos da mochila.

Sejam A e B os acontecimentos:

A: "O primeiro cromo retirado é da seleção portuguesa."

B: "O segundo cromo retirado é da seleção brasileira."

Sabe-se que $5P(A \cap B) = P(A)$.

Justifique que, inicialmente, existia um número ímpar de cromos da seleção portuguesa na mochila do Pedro.

6. Considere um determinado número real a e a função f, de domínio $\mathbb{R}$, da qual se sabe que:

- f é contínua;
- $f(a) > a + 2$;
- $f(a+1) < a + 3$.

Mostre que o gráfico da função f e a reta definida por $y = x + 2$ se intersetam em pelo menos um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]a, a+1[$.

7. Seja h a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$h(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{4x^2 + x + 4} - 3x}{x - 1} & \text{se } x < 1 \\[2ex] -\dfrac{3}{2} & \text{se } x = 1 \\[2ex] \dfrac{x^2 + x - 2}{x - x^3} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

7.1. Averigue se a função h é contínua em $x = 1$.

7.2. Estude a função h quanto à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados e, caso existam, escreva as suas equações.

8. Considere duas funções f e g, de domínio $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que:

- a reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota ao gráfico da função f;
- a função g é definida por $g(x) = \frac{(f(x)+2x)\,x^2}{(f(x))^2}$.

Mostre que o gráfico da função g tem uma assíntota horizontal

9. Seja k um número real.

Considere a função polinomial f definida, em $\mathbb{R}$, por $f(x) = \frac{1}{12}x^4 + \frac{k}{3}x^3 + \frac{k^2}{2}x^2 + 5x + 9$.

9.1. Considere $k = 1$.

Qual é a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 0?

(A) $y = -5x + 9$

(B) $y = 5x + 9$

(C) $y = x + 5$

(D) $y = -x + 5$

9.2. Mostre que, para qualquer valor de k, o gráfico de f não admite pontos de inflexão.

10. Considere a sucessão (u_n) de termo geral $u_n = -\frac{1}{1-2^n}$.

Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen} x}{x} & \text{se} \quad x > 0 \\ \cos x - 1 & \text{se} \quad x \leq 0 \end{cases}$$

O $\lim f(u_n)$ é igual a:

(A) $-\infty$ **(B)** 0 **(C)** 1 **(D)** $+\infty$

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.	**1.2.**	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**TOTAL**
15	15	10	15	10	15	10	15	15	15	15	15	10	15	10	200

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os seguintes acontecimentos:

R: “Participar na viagem de barco rabelo no rio Douro.”

B: “Participar na visita ao Palácio da Bolsa.”

Sabe-se que:

- $P(R) = 0{,}5$
- $P(\overline{B}|R) = 0{,}1$
- $P(\overline{B} \cap \overline{R}) = 0{,}2$

Pretende-se determinar $P(\overline{R}|B)$, ou seja, $\frac{P(\overline{R}\cap B)}{P(B)}$.

$$P(\overline{B}|R) = 0{,}1 \Leftrightarrow \frac{P(\overline{B} \cap R)}{0{,}5} = 0{,}1 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap R) = 0{,}1 \times 0{,}5 \Leftrightarrow P(\overline{B} \cap R) = 0{,}05$$

Organizando os dados numa tabela:

	$\boldsymbol{R}$	$\boldsymbol{\overline{R}}$	**Total**
$\boldsymbol{B}$	0,45	0,3	0,75
$\boldsymbol{\overline{B}}$	0,05	0,2	0,25
Total	0,5	0,5	1

$P(\overline{R}) = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$P(\overline{B}) = 0{,}05 + 0{,}2 = 0{,}25$

$P(B) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$

$P(\overline{R} \cap B) = 0{,}5 - 0{,}2 = 0{,}3$

Deste modo, $P(\overline{R}|B) = \frac{P(\overline{R}\cap B)}{P(B)} = \frac{0{,}3}{0{,}75} = 0{,}4$. A probabilidade pedida é igual a 40%.

1.2. O número de hóspedes que não participaram na visita ao Palácio da Bolsa nem participaram na viagem de barco rabelo no rio Douro é dado por $0{,}2n$. Assim:

$$\frac{{}^{0{,}2n}C_2}{{}^{n}C_2} = \frac{3}{95} \Leftrightarrow \frac{\frac{0{,}2n \times (0{,}2n - 1)}{2}}{\frac{n(n-1)}{2}} = \frac{3}{95} \Leftrightarrow \frac{0{,}2 \times (0{,}2n - 1)}{n - 1} = \frac{3}{95}$$

$$\Leftrightarrow 95 \times 0{,}2 \times (0{,}2n - 1) = 3n - 3$$

$$\Leftrightarrow 19(0{,}2n - 1) = 3n - 3$$

$$\Leftrightarrow 3{,}8n - 3n = -3 + 19$$

$$\Leftrightarrow 0{,}8n = 16$$

$$\Leftrightarrow n = 20$$

O número total de hóspedes desse hotel é igual a 20.

2. Opção (A)

$$P(A|B)=\frac{5}{6}\Leftrightarrow\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{5}{6}$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{5}{6}P(B)$$

$$\underset{(1)}{\Leftrightarrow}\frac{1}{4}=\frac{5}{6}P(B)$$

$$\Leftrightarrow\frac{6}{20}=P(B)$$

$$\Leftrightarrow P(B)=\frac{3}{10}$$

Cálculo auxiliar

$$P(\bar{A}\cup\bar{B})=3P(A\cap B)\Leftrightarrow P(\overline{A\cap B})=3P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1-P(A\cap B)=3P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow 1=4P(A\cap B)$$

$$\Leftrightarrow P(A\cap B)=\frac{1}{4}\quad\textbf{(1)}$$

Assim:

$$P(\bar{A}\cap B)=P(B)-P(A\cap B)=\frac{3}{10}-\frac{1}{4}=\frac{12}{40}-\frac{10}{40}=\frac{2}{40}=\frac{1}{20}=0{,}05$$

3.

3.1. P(“serem escolhidos pelo menos dois antigos professores”) =

$= 1 - P$(“não ser escolhido nenhum antigo professor ou ser escolhido apenas um antigo professor”)

$$=1-\frac{{}^{10}C_0\times{}^{45}C_6+{}^{10}C_1\times{}^{45}C_5}{{}^{55}C_6}\approx 0{,}298$$

A probabilidade pedida é, aproximadamente, 30%.

3.2. Opção (D)

- ${}^{40}C_{20}$ é o número de maneiras de escolher o conjunto de 20 alunos, entre 40, que se vai posicionar na 1.ª fila de trás;
- $20!$ é o número de maneiras dos 20 alunos de cada conjunto se posicionar nessa fila de trás;
- $20!$ é o número de maneiras dos restantes 20 alunos se posicionarem na outra fila de trás;
- $10!$ é o número de maneiras dos 10 professores se posicionarem na fila respetiva;
- $5!$ é o número de maneiras dos 5 funcionários se posicionarem na fila respetiva.

3.3. No contexto da situação $P(A|\bar{B})$, significa a probabilidade de, ao escolher 5 dos 55 participantes no encontro, exatamente 3 dos participantes escolhidos serem antigos professores, sabendo que nenhum dos participantes escolhidos é antigo aluno.

Ora, se nenhum dos participantes escolhidos é um antigo aluno, existem ${}^{15}C_5$ maneiras de escolher 5 pessoas de entre os 10 antigos professores e os 5 antigos funcionários, sendo então ${}^{15}C_5$ o número de casos possíveis.

O número de casos favoráveis corresponde ao número de maneiras de escolher 3 antigos professores de entre os 10 existentes e 2 antigos funcionários de entre os 5 existentes, o que pode ser feito de ${}^{10}C_3 \times {}^{5}C_2$ maneiras diferentes (${}^{10}C_3$ é o número de formas de escolher 3 antigos professores, e por cada uma destas, existem ${}^{5}C_2$ formas de escolher 2 antigos funcionários).

Segundo a regra de Laplace, num espaço amostral finito e onde os acontecimentos elementares são equiprováveis, a probabilidade de um acontecimento é dada pelo quociente entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis, pelo que a probabilidade pedida é:

$$\frac{{}^{10}C_3 \times {}^{5}C_2}{{}^{15}C_5} = \frac{1200}{3003} = \frac{400}{1001}$$

4. Opção (C)

Seja n a linha do triângulo de Pascal com 2024 elementos. Sabe-se que n = 2023, portanto o primeiro, o segundo, o penúltimo e o último elementos desta linha são: 1, 2023, 2023 e 1, respetivamente.

Todos os restantes elementos desta linha são superiores a 2023.

Assim, escolhendo ao acaso dois elementos desta linha, para que o seu produto seja 2023, apenas existem 4 casos (${}^{2}C_1 \times {}^{2}C_1$), num total de ${}^{2024}C_2$ casos possíveis.

A probabilidade pedida é, então, $\frac{4}{{}^{2024}C_2} = \frac{1}{511\,819}$.

5. <u>1.º processo de resolução</u>

$$5P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow P(B|A) = \frac{1}{5}$$

No contexto do problema, $P(B|A)$ representa a probabilidade de o segundo cromo retirado ser da seleção brasileira, sabendo que o primeiro cromo retirado foi da seleção portuguesa.

Ora, depois da primeira extração ficaram, então, na mochila $x + y - 1$ cromos no total, sendo $x - 1$ cromos da seleção portuguesa e y cromos da seleção brasileira.

Como $P(B|A) = \frac{1}{5}$, então $\frac{y}{x+y-1} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5y = x + y - 1 \Leftrightarrow x = 4y + 1$

Sendo $y \in \mathbb{N}$ e $4y$ par, então $4y + 1$ é ímpar.

Fica então provado que inicialmente existia um número ímpar de cromos da seleção portuguesa na mochila do Pedro.

<u>2.º processo de resolução</u>

Tem-se que $P(A \cap B) = \frac{x \times y}{(x+y)\times(x+y-1)}$ e $P(A) = \frac{x}{x+y}$.

Assim:

$$5P(A \cap B) = P(A) \Leftrightarrow 5 \times \frac{x \times y}{(x+y) \times (x+y-1)} = \frac{x}{x+y} \Leftrightarrow \frac{y}{x+y-1} = \frac{1}{5}$$

$$\Leftrightarrow 5y = x + y - 1$$

$$\Leftrightarrow x = 4y + 1$$

Sendo $y \in \mathbb{N}$ e $4y$ par, então $4y+1$ é ímpar.

Fica, então, provado que inicialmente existia um número ímpar de cromos da seleção portuguesa na mochila do Pedro.

6. O gráfico da função f e a reta definida por $y = x + 2$ intersetam-se em, pelo menos, um ponto cuja abcissa pertence ao intervalo $]a, a+1[$ se e somente se a condição $f(x) = x + 2$ tem pelo menos uma solução no intervalo $]a,\ a+1[$.

Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = f(x) - (x+2)$.

1) g é contínua em $\mathbb{R}$ por se tratar da diferença de duas funções contínuas. Em particular, g é contínua em $[a,\ a+1]$.

2) $g(a) = f(a) - (a+2) > 0$, pois $f(a) > a + 2$.

$g(a+1) = f(a+1) - (a+1+2) = f(a+1) - (a+3) < 0$, pois $f(a+1) < a+3$.

Logo, $g(a+1) < 0 < g(a)$.

Então, pelo teorema de Bolzano-Cauchy concluímos que:

$$\exists c \in]a, a+1[:\ g(c) = 0$$

Ou seja:

$$\exists c \in]a, a+1[:\ f(c) - (c+2) = 0$$

Isto é:

$$\exists c \in]a, a+1[:\ f(c) = c + 2$$

Assim, o gráfico da função f e a reta definida por $y = x + 2$ intersetam-se em, pelo menos, um ponto de abcissa pertencente ao intervalo $]a,\ a+1[$.

7.

7.1. h é contínua em $x = 1$ se $\lim\limits_{x \to 1} h(x)$ existe, ou seja, $\lim\limits_{x \to 1^-} h(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} h(x) = h(1)$.

- $$\lim_{x \to 1^-} h(x) = \lim_{x \to 1^-} \frac{\sqrt{4x^2+x+4} - 3x}{x-1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{4x^2+x+4-9x^2}{(x-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \frac{-5x^2+x+4}{(x-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

Cálculo auxiliar

$$-5x^2 + x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times (-5) \times 4}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+80}}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-1 \pm 9}{-10}$$

$$\Leftrightarrow x = 1 \ \vee \ x = -\frac{4}{5}$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-5(x-1)\left(x+\frac{4}{5}\right)}{(x-1)(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-5\left(x+\frac{4}{5}\right)}{(\sqrt{4x^2+x+4}+3x)} =$$

$$= \lim_{x\to 1^-} \frac{-5x-4}{\sqrt{4x^2+x+4}+3x} =$$

$$= \frac{-9}{3+3} =$$

$$= -\frac{9}{6} =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

- $\lim\limits_{x\to 1^+} h(x) = \lim\limits_{x\to 1^-} \frac{x^2+x-2}{x-x^3} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$$= \lim_{x\to 1^+} \frac{(x+2)(x-1)}{x(1-x)(1+x)} =$$

$$= -\lim_{x\to 1^+} \frac{x+2}{x(1+x)} =$$

$$= -\frac{3}{2}$$

Cálculo auxiliar

$x^2+x-2=0 \Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\times(-2)\times 1}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{2}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-1\pm 3}{2}$

$\Leftrightarrow x = -2 \vee x = 1$

- $h(1) = -\frac{3}{2}$

Logo, h é contínua em $x = 1$.

7.2. Assíntotas horizontais

- $x \to +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} h(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+x-2}{x-x^3} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x^3\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{x}-\frac{2}{x^2}}{x\left(-1+\frac{1}{x^2}\right)} = \frac{1}{-\infty} = 0$$

A reta de equação $y = 0$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \to +\infty$.

- $x \to -\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} h(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4x^2+x+4}-3x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{x^2\left(4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}\right)}-3x}{x-1} =$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{|x|\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-3x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}-3x}{x-1}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{x\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+3x}{x-1} = -\lim_{x\to-\infty} \frac{x\left(\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+3\right)}{x\left(1-\frac{1}{x}\right)}$$

$$= -\lim_{x\to-\infty} \frac{\sqrt{4+\frac{1}{x}+\frac{4}{x^2}}+3}{1-\frac{1}{x}} = -\frac{2+3}{1} = -5$$

A reta de equação $y = -5$ é assíntota horizontal ao gráfico de h quando $x \to -\infty$.

8. Como $D_f = \mathbb{R}^+$ e a reta de equação $y = -2x + 1$ é assíntota ao gráfico da função f, então:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = -2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{x \to +\infty} [f(x) + 2x] = 1$$

Como D_g é limitado inferiormente, só faz sentido averiguar se existe alguma assíntota horizontal ao gráfico g quando $x \to +\infty$:

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(f(x) + 2x)x^2}{\left(f(x)\right)^2} = \lim_{x \to +\infty} \left[(f(x) + 2x) \times \left(\frac{x}{f(x)} \right)^2 \right] =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) \times \lim_{x \to +\infty} \frac{1}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^2} =$$

$$= \lim_{x \to +\infty} (f(x) + 2x) \times \frac{1}{\left(\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}\right)^2} =$$

$$= 1 \times \frac{1}{(-2)^2} =$$

$$= \frac{1}{4}$$

Logo, a reta de equação $y = \frac{1}{4}$ é assíntota horizontal ao gráfico de g quando $x \to +\infty$.

9.

9.1. Opção (B)

$y = mx + b$, onde $m = f'(0) = 0 + 0 + 0 + 5$

Como $P\big(0, f(0)\big) = (0, 9)$ pertence à reta, então $y = 5x + 9$ é a equação reduzida da reta pretendida.

Cálculo auxiliar

$$f'(x) = \left(\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + 5x + 9 \right)' =$$

$$= \frac{4}{12}x^3 + \frac{3}{3}x^2 + \frac{2}{2}x + 5 =$$

$$= \frac{1}{3}x^3 + x^2 + x + 5$$

9.2. $k \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(\frac{4}{12}x^4 + \frac{k}{3}x^3 + \frac{k^2}{2}x^2 + 5x + 9 \right)' = \frac{1}{3}x^3 + kx^2 + k^2x + 5$

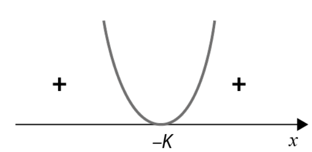
$f''(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + kx^2 + k^2x + 5 \right)' = x^2 + 2kx + k^2$

$f''(x) = 0$

$x^2 + 2kx + k^2 = 0 \Leftrightarrow (x + k)^2 = 0 \Leftrightarrow x + k = 0 \Leftrightarrow x = -k$

x	$-\infty$	$-k$	$+\infty$
Sinal de f''	$+$	0	$+$
Sentido das concavidades do gráfico de f	$\cup$	$f(-k)$	$\cup$

Cálculo auxiliar



Conclui-se que o gráfico de f apresenta a concavidade voltada para cima em $\mathbb{R}$, não apresentando pontos de inflexão.

10. Opção (C)

$$\lim u_n = \lim\left(-\frac{1}{1-2^n}\right) = \lim\frac{1}{2^n-1} = \frac{1}{+\infty} = 0^+$$

$$\lim f(u_n) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$$