Novo Espaço – Matemática A 12.º ano
Proposta de Teste [novembro - 2017]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ / ____ / ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. Seja a um número real positivo.

Considera a sucessão (u_n) em que $u_2 = 6$ e tal que:

$$\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = au_n - a \ , \ \ \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Se $u_{12} = 265\ 722$, então podes concluir que u_{11} é igual a:

(A) $797\ 163$ **(B)** $88\ 575$ **(C)** 19 **(D)** $265\ 692$

2. Dada uma sucessão (v_n), sabe-se que:

- $v_1 = 3$
- $v_2 = 1$
- $\lim(v_n) = -\infty$

Seja (u_n) uma sucessão definida por:

$$u_n = \begin{cases} n^2 + 3v_n & \text{se} \quad n \leq 500 \\ 3 - v_n & \text{se} \quad n > 500 \end{cases}$$

2.1. A sucessão (u_n) é monótona? Justifica.

2.2. Determina $\lim \dfrac{\sin(n)}{u_n}$.

3. Seja *f* a função polinomial de grau 4, definida por $f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 1$.

Sejam *A* e *B* os pontos do gráfico de *f* de abcissas, respetivamente, 1 e 2.

Justifica que existe um ponto *C* de abcissa $c \in]1, 2[$ tal que a reta tangente ao gráfico de *f* no ponto *C* é paralela à reta *AB*. Determina o valor, arredondado às centésimas, de *c*.

4. A população de uma escola secundária, do centro da cidade, distribui-se da seguinte forma:

- 60% dos alunos são rapazes;
- 75% dos alunos vivem na cidade;
- 30% dos alunos que vivem na cidade são raparigas.

Envolvendo todos os alunos da escola é feito um sorteio, de forma aleatória, para atribuir um computador.

4.1. A probabilidade de o computador ser atribuído a uma rapariga que vive na cidade é:

(A) $0,3$ **(B)** $0,075$ **(C)** $0,12$ **(D)** $0,225$

4.2. Determina a probabilidade de o premiado viver na cidade, sabendo que é rapaz. Apresenta o resultado em percentagem.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	15	10	10	15	15	15	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{3\}$, definida por $f(x)=\dfrac{x}{|x-3|}$.

Considera a sucessão de números reais (x_n) tal que $x_n=\dfrac{2}{\sqrt{n}}$.

Qual é o valor de $\lim f(x_n)$?

(A) 1 **(B)** $+\infty$ **(C)** 0 **(D)** -1

6. Sejam f e g funções reais de variável real, de domínio $\mathbb{R}$, tais que:

$$f'(x)=\frac{1-x^2}{\left(x^2+1\right)^2} \quad \text{e} \quad g(x)=\begin{cases}\dfrac{10-x}{10x} & \text{se } x>0\\ \dfrac{x}{1-x} & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

Sabe-se que:

- $f(-1)=g(-1)$
- $f(2)=g(2)$

6.1. Determina $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\left[f(x)-f(-1)\right]\times g(x)}{x^2-1}$.

6.2. A equação $f(x)=0{,}1$ é possível em $]-1,2[$. Justifica.

6.3. Verifica que $0{,}1$ está entre $g(-1)$ e $g(2)$ e que $g(-1)\times g(2)<0$.

Recorrendo ao Teorema de Bolzano-Cauchy, podes garantir que a equação $g(x)=0{,}1$ é possível no intervalo $]-1,2[$? Justifica.

7. Seja *f* a função real de variável real, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$, definida por:

$$f(x) = \left(\frac{x}{x+1}\right)^3$$

Sabe-se que $f''(x) = \dfrac{6x(1-x)}{(x+1)^5}$, sendo f'' a função segunda derivada de f.

7.1. Mostra que $f'(x) = \dfrac{3x^2}{(x+1)^4}$.

7.2. Determina a equação reduzida da reta tangente ao gráfico de *f* no ponto de abcissa 1.

7.3. Designa por *A* e *B* os pontos de inflexão do gráfico de *f*, sendo a abcissa de *A* menor que a abcissa de *B* e representadas, respetivamente, por x_A e x_B.

Mostra que: $\forall x \in \left]x_A, x_B\right[, \quad f''(x) > 0$

8. Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x) = \dfrac{x}{2} + \dfrac{2}{x}$.

8.1. Determina, caso exista, uma equação da assíntota vertical ao gráfico de *f*.

8.2. Seja *C* o ponto do gráfico de *f*, representado num referencial o.n. *xOy*, cuja ordenada é o mínimo absoluto da função *f*.

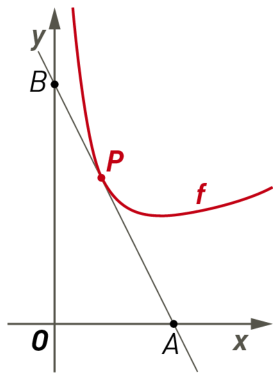
Escreve uma equação da circunferência de centro em *C* e que passa pela origem do referencial.

8.3. Na figura, em referencial o.n. *Oxy*, encontra-se representada a função *f*.

Sabe-se que:

- *B* pertence a *Oy* e *A* pertence a *Ox*, sendo $\overline{OB} = 2\overline{OA}$;
- a reta *AB* é tangente ao gráfico de *f* no ponto *P*.

Determina as coordenadas do ponto *P*.



FIM (Caderno 2)

<table>
<tr><th colspan="13">Cotações</th></tr>
<tr><td></td><th colspan="7">Caderno 1 (com calculadora)</th><td colspan="5"></td></tr>
<tr><th>Questões</th><th>1.</th><th>2.1.</th><th colspan="2">2.2.</th><th>3.</th><th>4.1.</th><th>4.2.</th><td colspan="5"></td></tr>
<tr><th>Pontos</th><td>15</td><td>10</td><td colspan="2">10</td><td>15</td><td>15</td><td>15</td><th colspan="4">Total</th><th>80</th></tr>
<tr><td></td><th colspan="10">Caderno 2 (sem calculadora)</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Questões</th><th>5.</th><th>6.1.</th><th>6.2.</th><th>6.3.</th><th>7.1.</th><th>7.2.</th><th>7.3.</th><th>8.1.</th><th>8.2.</th><th>8.3.</th><td colspan="2"></td></tr>
<tr><th>Pontos</th><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><td>12</td><th>Total</th><th>120</th></tr>
<tr><th colspan="12">Total</th><th>200</th></tr>
</table>

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;*
r – raio)

Áreas de figuras planas

Polígono regular: $Semiperímetro \times Apótema$

Setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α – *amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio*)

Áreas de superfícies

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(*r – raio da base; g – geratriz*)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(*r – raio*)

Volumes

Pirâmide: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Cone: $\frac{1}{3} \times Área\ da\ base \times Altura$

Esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (*r – raio*)

PROGRESSÕES

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

CADERNO 1
(É permitido o uso de calculadora gráfica)

1. $u_2 = 6 \Leftrightarrow a^2 - a = 6 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 = 0 \Leftrightarrow a = 3 \vee a = -2$.
Como $a > 0$, conclui-se que $a = 3$.

$u_{12} = 265722 \Leftrightarrow 3u_n - 3 = 265722 \Leftrightarrow 3u_n = 265725 \Leftrightarrow u_n = 88575$

Resposta: Opção correta **(B)** 88575

2.

2.1. Relativamente à sucessão (u_n) tem-se:

- $u_1 = 1 + 3v_1 = 10$;
- $u_2 = 4 + 3v_2 = 7$;
- $\lim(3 - v_n) = 3 - (-\infty) = +\infty$

Como $u_1 > u_2$ e $\lim(u_n) = +\infty$, conclui-se que a sucessão (u_n) é não monótona.

Resposta: A sucessão (u_n) é não monótona.

2.2. Sabe-se que: $-1 \leq \sin(n) \leq 1$

Como $\lim(u_n) = +\infty$, a partir de uma certa ordem, $-\frac{1}{u_n} \leq \sin(n) \leq \frac{1}{u_n}$.

Como $\lim\left(-\frac{1}{u_n}\right) = \lim\left(\frac{1}{u_n}\right) = 0$, pelo Teorema das sucessões enquadradas conclui-se que $\lim \frac{\sin n}{u_n} = 0$.

Resposta: $\lim \frac{\sin n}{u_n} = 0$

3. Sendo $f(x) = x^4 - 3x^2 - x + 1$, tem-se $f(1) = -2$ e $f(2) = 3$.

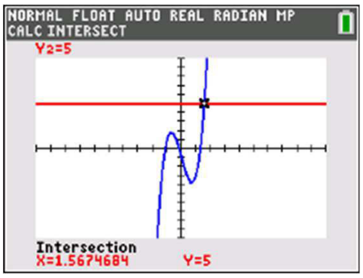
O declive da reta definida pelos pontos $A(1, -2)$ e $A(2, 3)$ é dado por:

$$m = \frac{f(2) - f(1)}{2 - 1} = \frac{3 + 2}{1} = 5$$

Como f é uma função polinomial, é contínua e diferenciável em $\mathbb{R}$, em particular é contínua em [1, 2] e diferenciável em]1, 2[.

Pelo Teorema de Lagrange, $\exists c \in \left]a,b\right[: \ f'(c) = 5$.

A reta de declive 5 que passa pelo ponto de abcissa c é tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa c.



$f'(x) = 4x^3 - 6x - 1$

Resolvendo graficamente a equação $f'(c) = 5$ obtém-se:

$c \approx 1,57$

Resposta: $c \approx 1,57$

4. Considera os acontecimentos:

***C*:** "O computador é atribuído a um aluno que vive na cidade."

***M*:** "O computador é atribuído a um aluno do sexo masculino."

***F*:** "O computador é atribuído a um aluno do sexo feminino."

Sabe-se que:

- $P(M) = 0,6$
- $P(C) = 0,75$
- $P(F \mid C) = 0,3$

4.1. $P(C \cap F) = 0,3 \times 0,75 = 0,225$

Resposta: Opção correta **(D)** **0,225**

4.2. $P(M \mid C) = 1 - 0,3 = 0,7$

$$P(C \mid M) = \frac{P(C \cap M)}{P(M)} = \frac{0,75 \times 0,7}{0,6} = 0,875$$

Resposta: A probabilidade de o premiado viver na cidade, sabendo que é rapaz é de 0,875.

FIM (Caderno 1)

Cotações							Total
Questões - Caderno 1	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	
Pontos	15	10	10	15	15	15	**80**

CADERNO 2
(Não é permitido o uso de calculadora)

5. $\lim(x_n) = \lim \frac{2}{\sqrt{n}} = \frac{2}{+\infty} = 0$

$\lim f(x_n) = \lim \frac{x_n}{|x_n - 3|} = \frac{0}{3} = 0$

Resposta: Opção correta **(C) 0**

6.

6.1. $\lim\limits_{x \to -1} \frac{[f(x) - f(-1)] \times g(x)}{x^2 - 1}$ **=** $\lim\limits_{x \to -1} \frac{[f(x) - f(-1)] \times g(x)}{(x+1)(x-1)}$ **=**

$\lim\limits_{x \to -1} \frac{[f(x) - f(-1)]}{x+1} \times \lim\limits_{x \to -1} \frac{g(x)}{x-1}$ **=** $f'(-1) \times \lim\limits_{x \to -1} \frac{g(x)}{x-1}$ **=** $\frac{1-(-1)^2}{\left((-1)^2+1\right)^2} \times \lim\limits_{x \to -1} \frac{x}{(1-x)(x-1)}$ **=**

$\frac{0}{4} \times \left(\frac{-1}{-4}\right) = 0$

Resposta: $\lim\limits_{x \to -1} \frac{[f(x) - f(-1)] \times g(x)}{x^2 - 1} = 0$

6.2. Como a função *f* admite derivada finita em todos os pontos do domínio, em particular em [–1, 2], a função é contínua em [–1, 2].

$f(-1) = g(-1) = -\frac{1}{2}$ e $f(2) = g(2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$

Como $-\frac{1}{2} < 0{,}1 < \frac{2}{5}$, pelo Teorema de Bolzano, $\exists c \in \left]-1, 2\right[: \ f(c) = 0{,}1$.

Logo, a equação $f(x) = 0{,}1$ é possível em]–1, 2[.

6.3. Sendo $g(-1) = -\frac{1}{2}$ e $g(2) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5}$, verifica-se que $-\frac{1}{2} < 0{,}1 < \frac{2}{5}$ e $g(-1) \times g(2) < 0$.

Como $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{10 - x}{10x} = \frac{10}{0^+} = +\infty$, a função *g* não é contínua em [–1, 2], logo o Teorema de Bolzano-Cauchy não é aplicável neste intervalo.

Resposta: Não é possível garantir que $g(x) = 0{,}1$ é possível através do Teorema de Bolzano-Cauchy.

7.

7.1. $f'(x)=3\left(\frac{x}{x+1}\right)^2\times\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{3x^2}{(x+1)^4}$, como queríamos demonstrar.

7.2. $f(1)=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$

Seja $y=mx+b$ a equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1.

$m=f'(1)=\frac{3}{16}$. Então, tem-se $y-\frac{1}{8}=\frac{3}{16}(x-1) \Leftrightarrow y=\frac{3x}{16}-\frac{3}{16}+\frac{1}{8} \Leftrightarrow y=\frac{3x}{16}-\frac{1}{16}$

Resposta: $y=\frac{3x}{16}-\frac{1}{16}$

7.3. Sabendo que $f''(x)=\frac{6x(1-x)}{(x+1)^5}$, podemos fazer o estudo de sinais de f''.

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
$6x$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$+$
$1-x$	$+$		$+$	$+$	$+$	0	$-$
$(x+1)^5$	$-$		$+$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$		$-$	0	$+$	0	$-$

Por observação da tabela identifica-se $x_A=0$ e $x_B=1$, abcissas dos pontos de inflexão do gráfico de f.

$\forall x\in\,]0,1[,\ f''(x)>0$

8.

8.1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\right)=0+\frac{2}{0^+}=+\infty$

Resposta: Uma equação da assíntota vertical do gráfico de f é $x=0$.

8.2. $f'(x)=\frac{1}{2}-\frac{2}{x^2}=\frac{x^2-4}{2x^2}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{2x^2}=0 \Leftrightarrow (x-2)(x+2)=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow$

$(x=2 \vee x=-2) \wedge x>0 \Leftrightarrow x=2$

x	0		2	$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
f		$\searrow$	2	$\nearrow$

$f(2)$ é mínimo da função. Tem-se $f(2)=2$, ou seja $C(2,2)$.

$\overline{OC} = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

Equação da circunferência de centro C e que passa na origem: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

Resposta: $(x-2)^2 + (y-2)^2 = 8$

8.3. Seja $A\hat{O}B = \alpha$ e $y = mx + b$ a equação reduzida da reta AB.

$$\tan \alpha = \frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = 2$$

$m = \tan(180 - \alpha) = -\tan \alpha = -2$

Assim, $f'(x) = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2-4}{2x^2} = -2 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 4 + 4x^2}{2x^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{5x^2-4}{2x^2} = 0$.

Tem-se: $\left(x = \frac{2}{\sqrt{5}} \vee x = -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \wedge x > 0 \Leftrightarrow x = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$f\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}\right) = \frac{\frac{2\sqrt{5}}{5}}{2} + \frac{2}{\frac{2\sqrt{5}}{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{5\sqrt{5}}{5} = \frac{6\sqrt{5}}{5}$. O ponto P tem coordenadas $\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$.

Resposta: $P\left(\frac{2\sqrt{5}}{5}, \frac{6\sqrt{5}}{5}\right)$

FIM (Caderno 2)

Cotações											
Caderno 1 (com calculadora)											
Questões	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**					
Pontos	15	10	10	15	15	15				**Total**	**80**
Caderno 2 (sem calculadora)											
Questões	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.1.**	**7.2.**	**7.3.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	
Pontos	12	12	12	12	12	12	12	12	12	12	**Total**	**120**
Total											**200**