Teste de Matemática A

2017 / 2018

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ___ Turma: ___

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Grupo I

1. Considere as proposições:

a: "π é um número irracional."

b: "$\sqrt{3}$ é um número racional."

c: "$\frac{1}{3}$ é um número racional."

Qual das seguintes proposições é falsa?

(A) $\sim a \Leftrightarrow b$ **(B)** $a \Rightarrow (b \Rightarrow c)$ **(C)** $a \wedge c \Rightarrow b$ **(D)** $\sim a \vee \sim b$

2. Considere as seguintes proposições:

p: "Em $\mathbb{Z}$, a condição $x^2 = 2$ é impossível."

q: "Em $\mathbb{Q}$, a condição $x^2 = 2$ é possível, não universal."

r: "Em $\mathbb{R}$, a condição $x^2 = 2$ é universal."

Podemos concluir que:

(A) apenas a proposição p é verdadeira.

(B) apenas a proposição q é verdadeira.

(C) apenas a proposição q é falsa.

(D) apenas a proposição r é falsa.

3. Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $\exists x \in \mathbb{N}: x^2 \leq 0$ **(B)** $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq x$

(C) $\exists x \in \mathbb{Q}: (x-1)(x+1) = 4$ **(D)** $\forall x \in \mathbb{R}, x \neq 3 \Rightarrow x^2 \neq 9$

4. Considere a seguinte proposição:

"O Pedro vai ao ginásio todos os dias da semana."

Qual das seguintes proposições é equivalente à negação da proposição anterior?

(A) "O Pedro vai ao ginásio em alguns dias da semana."

(B) "Em nenhum dia da semana o Pedro vai ao Ginásio."

(C) "Há pelo menos um dia da semana em que o Pedro vai ao ginásio."

(D) "Há pelo menos um dia da semana em que o Pedro não vai ao ginásio."

5. Considera os seguintes conjuntos

$A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é ímpar}\}$

$B = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é divisor de } 14\}$

$C = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é primo}\}$

Qual dos seguintes conjuntos é igual a $(A \cap B) \backslash C$?

(A) $\emptyset$ **(B)** $\{1\}$ **(C)** $\{1, 7\}$ **(D)** $\{2, 7\}$

Grupo II

1. Sejam p, q e r as seguintes proposições acerca de um determinado dia do João.

p: "De manhã o João vai ter teste de Matemática."

q: "À tarde o João vai treinar futebol."

r: "À tarde o João vai estudar com a Joana."

1.1. Traduza em linguagem corrente as seguintes proposições.

1.1.1. $p \wedge (q \vee r)$

1.1.2. $\sim r \Rightarrow q$

1.1.3. $q \Leftrightarrow \sim r$

1.2. Traduza em linguagem simbólica as seguintes proposições.

1.2.1. "De manhã, o João vai ter teste de Matemática e, à tarde, não vai treinar futebol nem vai estudar com a Joana."

1.2.2. "Se o João de manhã vai ter teste de Matemática e à tarde não vai treinar futebol, então à tarde o João vai estudar com a Joana."

1.2.3. "É condição necessária para que à tarde o João vá estudar com a Joana que à tarde o João não vá treinar futebol."

1.3. Sem utilizar a expressão "Não é verdade que…", escreva em linguagem corrente uma proposição equivalente à negação da proposição: "Se o João de manhã vai ter teste de Matemática, então à tarde não vai estudar com a Joana."

1.4. Sabendo que a proposição $(p \wedge r) \vee (p \Rightarrow q)$ é falsa, o que pode concluir acerca do dia do João?

2. Sejam p e q duas proposições.

Prove que a proposição $\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(p \Leftrightarrow q)$ é equivalente à proposição $p \vee q$, utilizando:

2.1. uma tabela de verdade;

2.2. as propriedades das operações lógicas.

3. Considere, em $\mathbb{R}$, as seguintes condições:

$a(x)$: $5 - \frac{x-2}{2} > 5$

$b(x)$: $x^2 - x - 2 = 0$

$c(x)$: $-1 < x \leq \pi$

3.1. Indique, justificando, o valor lógico da proposição $\exists x \in \mathbb{R}: a(x) \wedge b(x)$.

3.2. Sem utilizar o símbolo ~, escreva, em linguagem simbólica, uma proposição equivalente à negação da proposição da alínea anterior.

3.3. Considere os seguintes conjuntos de números reais:

$$A = \{x \epsilon \mathbb{R}: a(x)\}, \qquad B = \{x \epsilon \mathbb{R}: b(x)\} \quad \text{e} \quad C = \{x \epsilon \mathbb{R}: c(x)\}$$

3.3.1. Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$.

3.3.2. Indique, sob a forma de intervalo ou reunião de intervalos disjuntos, os seguintes conjuntos.

(i) $C \setminus B$

(ii) $A \cup \overline{C}$

4. Demonstre por contrarrecíproco a proposição: "Se um número natural n não é divisível por 7, então não é divisível por 21".

FIM

COTAÇÕES

Grupo	Item															
	Cotação (em pontos)															
I	**1. a 5.**															
	5 × 8 pontos															**40**
II	**1.1.1.**	**1.1.2.**	**1.1.3.**	**1.2.1.**	**1.2.2.**	**1.2.3**	**1.3**	**1.4.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.1.**	**3.3.2.**	**4.**	
	5	5	5	5	5	10	10	15	15	15	15	10	10	2x10	15	**160**
Total																**200**

TESTE N.º 1 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (C)

Tem-se que:

$a \Leftrightarrow \text{V}$

$b \Leftrightarrow \text{F}$

$c \Leftrightarrow \text{V}$

Assim:

$(\sim a \Leftrightarrow b) \Leftrightarrow (\text{F} \Leftrightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{V}$

$(a \Rightarrow (b \Rightarrow c)) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow (\text{F} \Rightarrow \text{V})) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{V}) \Leftrightarrow \text{V}$

$(a \wedge c \Rightarrow b) \Leftrightarrow (\text{V} \wedge \text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow (\text{V} \Rightarrow \text{F}) \Leftrightarrow \text{F}$

$(\sim a \vee \sim b) \Leftrightarrow (\text{F} \vee \text{V}) \Leftrightarrow \text{V}$

2. Opção (A)

p: "Em $\mathbb{Z}$, a condição $x^2 = 2$ é impossível." – Proposição verdadeira

q: "Em $\mathbb{Q}$, a condição $x^2 = 2$ é possível, não universal." – Proposição falsa

r: "Em $\mathbb{R}$, a condição $x^2 = 2$ é universal." – Proposição falsa

3. Opção (B)

Das opções apresentadas, apenas a proposição $\forall x \in \mathbb{R},\ x \geq x$ é verdadeira.

4. Opção (D)

"Não é verdade que o Pedro vai ao ginásio todos os dias da semana" é equivalente a "Há pelo menos um dia da semana em que o Pedro não vai ao ginásio".

5. Opção (B)

$A = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é ímpar}\} = \{1, 3, 5, 7, 9, \ldots\}$

$B = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é divisor de } 14\} = \{1, 2, 7, 14\}$

$C = \{x \in \mathbb{N}: x \text{ é primo}\} = \{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots\}$

$A \cap B = \{1, 7\}$

$(A \cap B) \backslash C = \{1\}$

Grupo II

1.

1.1.

1.1.1. $p \wedge (q \vee r)$: “De manhã, o João vai ter teste de Matemática e, à tarde, vai treinar futebol ou estudar com a Joana”.

1.1.2. $\sim r \Longrightarrow q$: “Se o João não vai estudar com a Joana à tarde, então à tarde vai treinar futebol”.

1.1.3. $q \Longleftrightarrow \sim r$: “O João vai treinar futebol à tarde se e só se não vai estudar, à tarde, com a Joana”.

1.2.

1.2.1. $p \wedge \sim q \wedge \sim r$

1.2.2. $p \wedge \sim q \Rightarrow r$

1.2.3. $r \Rightarrow \sim q$

1.3. “Se o João de manhã vai ter teste de Matemática, então à tarde não vai estudar com a Joana” pode ser traduzido simbolicamente por $p \Rightarrow \sim r$.

Assim, a sua negação é $\sim(p \Rightarrow \sim r) \Leftrightarrow (p \wedge \sim(\sim r)) \Leftrightarrow (p \wedge r)$.

Ou seja, “O João de manhã vai ter teste de Matemática e à tarde vai estudar com a Joana”.

1.4. Como a proposição $(p \wedge r) \vee (p \Rightarrow q)$ é falsa, então as proposições $(p \wedge r)$ e $(p \Rightarrow q)$ são também falsas, visto tratar-se da disjunção de proposições, que só é falsa no caso em que ambas as proposições são falsas.

Como $(p \Rightarrow q)$ é falsa, então p é verdadeira e q é falsa, pois uma implicação de proposições só é falsa no caso em que o antecedente é verdadeiro e o consequente é falso.

Como $(p \wedge r)$ é falsa e p é verdadeira, então r terá de ser uma proposição falsa, visto tratar-se da conjunção de proposições com valores lógicos diferentes.

Assim, $p \Leftrightarrow \mathrm{V}, q \Leftrightarrow \mathrm{F}$ e $r \Leftrightarrow \mathrm{F}$, isto é, nesse dia de manhã o João teve teste de Matemática, mas à tarde não foi treinar futebol nem estudar com a Joana.

2.

2.1.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$	$p \Leftrightarrow q$	$\sim(p \Leftrightarrow q)$	$\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(p \Leftrightarrow q)$	$p \vee q$
V	V	F	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	V	F	F	V	V	V
F	V	V	F	V	F	F	V	V	V
V	F	V	V	V	F	V	F	F	F

Como as colunas que dizem respeito às proposições $\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(p \Leftrightarrow q)$ e $(p \vee q)$ são iguais, conclui-se que as proposições são equivalentes.

2.2. $\sim(\sim p \vee \sim q) \vee \sim(p \Leftrightarrow q) \Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \sim((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p))$

$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee \sim(p \Rightarrow q) \vee \sim(q \Rightarrow p))$

$\Leftrightarrow ((p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p))$

$\Leftrightarrow ((p \wedge (q \vee \sim q)) \vee (q \wedge \sim p))$

$\Leftrightarrow ((p \wedge \mathrm{V}) \vee (q \wedge \sim p))$

$\Leftrightarrow (p \vee (q \wedge \sim p))$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge (p \vee \sim p))$

$\Leftrightarrow ((p \vee q) \wedge \mathrm{V})$

$\Leftrightarrow (p \vee q)$

3.

3.1.

Cálculos auxiliares

$5 - \frac{x-2}{2} > 5 \Leftrightarrow -x + 2 > 0$

$\Leftrightarrow -x > -2$

$\Leftrightarrow x < 2$

$x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{(-1)^2 - 4\times1\times(-2)}}{2\times1}$

$\Leftrightarrow x = \frac{1+3}{2} \vee x = \frac{1-3}{2}$

$\Leftrightarrow x = 2 \vee x = -1$

A proposição "$\exists x \in \mathbb{R}: a(x) \wedge b(x)$" é verdadeira, já que a concretização da variável x por -1 transforma tanto a condição $a(x)$ como a condição $b(x)$ em proposições verdadeiras.

3.2. $\sim(\exists x \in \mathbb{R}: a(x) \wedge b(x)) \Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \sim(a(x) \wedge b(x)))$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \ \sim a(x) \vee \sim b(x))$

$\Leftrightarrow (\forall x \in \mathbb{R}, \ 5 - \frac{x-2}{2} \leq 5 \vee \ x^2 - x - 2 \neq 0)$

3.3.

3.3.1. Tem-se que $A =]-\infty, 2[$ e $B = \{-1, 2\}$.

A proposição $\forall x, x \in B \Rightarrow x \in A$ é uma proposição falsa, já que a concretização da variável x por 2 transforma a condição $x \in B$ numa proposição verdadeira e a condição $x \in A$ numa proposição falsa.

3.3.2. $A =]-\infty, 2[$; $B = \{-1, 2\}$; $C =]-1, \pi]$

(i) $C \setminus B =]-1, 2[\cup]2, \pi]$

(ii) $A \cup \overline{C} =]-\infty, 2[\cup ( ]-\infty, -1] \cup]\pi, +\infty[) =$

$=]-\infty, 2[\cup]\pi, +\infty[$

4. A provar: "Se um número natural n não é divisível por 7, então não é divisível por 21".

O que é equivalente a provar: "Se um número natural n é divisível por 21, então é divisível por 7".

Seja $n \in \mathbb{N}$. Se n é divisível por 21, então n é da forma $n = 21k$, com $k \in \mathbb{N}$.

Assim, $n = 7 \times 3k$, isto é, n é da forma $7 \times k'$, com $k' \in \mathbb{N}$.

Logo, n é divisível por 7, como queríamos demonstrar.