

Teste N.º 4

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. No plano munido de um referencial o.n. xOy , considere a elipse definida por $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

Seja F_1 o foco da elipse de abcissa positiva.

Uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém F_1 pode ser:

(A) $(x, y) = (5, 0) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y) = (3, 0) + k(0, 1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (5, 0) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y) = (3, 0) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$

2. Considere o polinómio $A(x) = -2x^3 + 5x^2 - x - 2$.

Sabendo que o polinómio $A(x)$ é divisível por $x - 1$, determine os valores reais de x para os quais $-2x^3 + 5x^2 > x + 2$.

3. Considere, em \mathbb{R} , as condições $a(x): x^{2018} + 1 > 0$ e $b(x): x^{2017} < 0$.

Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $a(x)$ é uma condição possível não universal e $b(x)$ é uma condição impossível.

(B) $a(x)$ é uma condição universal e $b(x)$ é uma condição possível não universal.

(C) $a(x)$ é uma condição possível não universal e $b(x)$ é uma condição possível não universal.

(D) $a(x)$ é uma condição universal e $b(x)$ é uma condição impossível.

4. Considere, num plano munido de um referencial cartesiano, os pontos $A(\sqrt{2}, -4)$ e $B(\sqrt{8}, -2)$ e as retas r e s definidas por $r: (x, y) = (-3, 6) + k(2, 3), k \in \mathbb{R}$ e $s: y = -2x$.

4.1. Determine um sistema de equações paramétricas da reta paralela à reta s e que contém o ponto médio de $[AB]$.

4.2. Considere I o ponto de interseção das retas r e s . Determine uma equação da circunferência tangente ao eixo das abcissas e de centro I .

4.3. Para cada $p \in \mathbb{R}$, considere o vetor $\vec{u}(p^2, p - 1)$.

Indique, justificando, o valor lógico da seguinte proposição: *Não existe nenhum valor real p tal que os vetores \vec{u} e \vec{AB} sejam colineares.*

5. Considere, fixado um referencial cartesiano do espaço, a superfície esférica de equação:

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 7$$

Para que valores reais de a a interseção da superfície esférica com o plano $x = a$ é uma circunferência de raio $\sqrt{6}$?

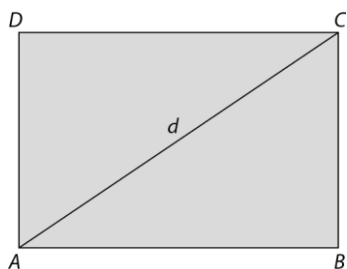
(A) 0 e 1

(B) 1 e 2

(C) 0 e 2

(D) -1 e 1

9. Considere o retângulo $[ABCD]$ representado na figura e seja d a medida da diagonal desse retângulo.



9.1. Mostre que $\vec{AC} + \vec{DB} = 2\vec{DC}$.

9.2. Sabe-se que $\overline{AB} = \frac{2}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$ e $\overline{BC} = \frac{2}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}$, onde $a, b \in \mathbb{N}$ e $a > b$.

Considere a pirâmide quadrangular regular cuja base é o quadrado de lado d e a altura é dada por $a - b$.

Prove que o volume da pirâmide pode ser dado por $\frac{8(a+b)}{3(a-b)}$.

FIM

COTAÇÕES

Item														
Cotação (em pontos)														
1.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	6.1.	6.2.	6.3.	7.	8.	9.1.	9.2.	
8	20	8	15	20	20	8	15	15	20	8	8	15	20	200

TESTE N.º 4 – Proposta de resolução

1. Opção (B)

A elipse definida por $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$ tem os focos no eixo Ox . Sendo c a semidistância focal, tem-se que $c^2 = 25 - 16$, isto é, $c = \sqrt{9} = 3$. Assim, $F_1(3,0)$.

Para que a reta seja paralela ao eixo das ordenadas, um vetor diretor pode ser $\vec{u}(0,1)$.

Assim, uma equação vetorial da reta paralela ao eixo das ordenadas e que contém F_1 pode ser $(x, y) = (3,0) + k(0,1), k \in \mathbb{R}$.

$$2. -2x^3 + 5x^2 > x + 2 \Leftrightarrow \underbrace{-2x^3 + 5x^2 - x - 2}_{A(x)} > 0$$

$$\Leftrightarrow A(x) > 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 1)(-2x - 1)(x - 2) > 0$$

Cálculos auxiliares

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & 5 & -1 & -2 \\ 1 & & -2 & 3 & 2 \\ \hline & -2 & 3 & 2 & 0 \end{array}$$

$$-2x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4 \times (-2) \times 2}}{2 \times (-2)}$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{-3 \pm 5}{-4}$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} \vee x = 2$$

$$A(x) = (x - 1)(-2x^2 + 3x + 2) =$$

$$= (x - 1) \times (-2) \times \left(x + \frac{1}{2}\right)(x - 2) =$$

$$= (x - 1)(-2x - 1)(x - 2)$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$		1		2	$+\infty$
$x - 1$	-	-	-	0	+	+	+
$-2x - 1$	+	0	-	-	-	-	-
$x - 2$	-	-	-	-	-	0	+
$A(x)$	+	0	-	0	+	0	-

$$A(x) > 0 \Leftrightarrow \left(x < -\frac{1}{2} \vee 1 < x < 2\right)$$

$$C. S. = \left] -\infty, -\frac{1}{2} \right[\cup] 1, 2 [$$

3. Opção (B)

$a(x)$ é uma condição universal, pois qualquer concretização da variável x por um número real transforma a condição $x^{2018} + 1 > 0$ numa proposição verdadeira.

$b(x)$ é uma condição possível não universal, pois existem concretizações da variável x por números reais que transformam a condição numa proposição verdadeira (por exemplo, para $x = -1$, vem que

$(-1)^{2017} < 0$ é uma proposição verdadeira) e existem valores reais de x que transformam a condição numa proposição falsa (por exemplo, para $x = 1$, vem que $1^{2017} < 0$ é uma proposição falsa).

4.

4.1. O declive da reta s é -2 , logo um vetor diretor de s é, por exemplo, $\vec{u}(1, -2)$. Este vetor pode também ser um vetor diretor da reta pretendida, uma vez que são paralelas.

Seja M o ponto médio de $[AB]$:

$$M = \left(\frac{\sqrt{2} + \sqrt{8}}{2}, \frac{-4 + (-2)}{2} \right) = \left(\frac{\sqrt{2} + 2\sqrt{2}}{2}, -\frac{6}{2} \right) = \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}, -3 \right)$$

Sistema de equações paramétricas da reta pretendida:

$$\begin{cases} x = \frac{3\sqrt{2}}{2} + k, k \in \mathbb{R} \\ y = -3 - 2k \end{cases}$$

4.2. $r: (x, y) = (-3, 6) + k(2, 3), k \in \mathbb{R} \quad m = \frac{3}{2}$

Equação reduzida da reta $r: y = \frac{3}{2}x + b$

Como $(-3, 6) \in r$:

$$6 = \frac{3}{2} \times (-3) + b \Leftrightarrow 6 + \frac{9}{2} = b \Leftrightarrow b = \frac{21}{2}$$

$$r: y = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2}$$

Determinação do ponto I , ponto de interseção das retas r e s :

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2} \\ y = -2x \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} -2x = \frac{3}{2}x + \frac{21}{2} \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 3x = 21 \\ \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} -7x = 21 \\ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = -2 \times (-3) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 \\ y = 6 \end{cases} \end{aligned}$$

O ponto de interseção das retas r e s é $I(-3, 6)$.

Para que a circunferência tenha centro em $I(-3, 6)$ e seja tangente ao eixo das abcissas, o raio terá de ser 6.

Assim, uma equação da circunferência é $(x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 36$.

4.3. $\vec{AB} = B - A = (\sqrt{8}, -2) - (\sqrt{2}, -4) =$
 $= (\sqrt{8} - \sqrt{2}, -2 + 4) =$
 $= (2\sqrt{2} - \sqrt{2}, 2) =$
 $= (\sqrt{2}, 2)$

$$\vec{u}(p^2, p - 1), p \in \mathbb{R}$$

Para que \vec{AB} e \vec{u} sejam colineares, tem de se verificar $\frac{p^2}{\sqrt{2}} = \frac{p-1}{2}$.

Assim:

$$2p^2 = \sqrt{2}(p - 1) \Leftrightarrow 2p^2 - \sqrt{2}p + \sqrt{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \times 2 \times \sqrt{2}}}{2 \times 2}$$

$$\Leftrightarrow p = \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2-8\sqrt{2}}}{4}$$

Como $2 - 8\sqrt{2} < 0$, a equação é impossível em \mathbb{R} , ou seja, não existe nenhum valor real p tal que os vetores \vec{u} e \overrightarrow{AB} sejam colineares.

A proposição é, então, verdadeira.

5. Opção (C)

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 7 \wedge x = a$$

Para que a condição $(a-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 7 \wedge x = a$ represente uma circunferência de raio $\sqrt{6}$ tem que se verificar $(a-1)^2 = 1$, isto é:

$$a-1 = 1 \vee a-1 = -1 \Leftrightarrow a = 2 \vee a = 0$$

6.

6.1. $A(0,2,0), B(-2,4,4), D(-6,3,2)$ e $E(-1,1,3)$

Observa-se que $F = E + \overrightarrow{AB}$ e $H = E + \overrightarrow{AD}$.

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (-2, 2, 4)$$

$$\overrightarrow{AD} = D - A = (-6, 1, 2)$$

Logo:

$$F = E + \overrightarrow{AB} = (-1, 1, 3) + (-2, 2, 4) = (-3, 3, 7)$$

$$H = E + \overrightarrow{AD} = (-1, 1, 3) + (-6, 1, 2) = (-7, 2, 5)$$

6.2. $C = B + \overrightarrow{AD} = (-2, 4, 4) + (-6, 1, 2) = (-8, 5, 6)$

Como $y_C = 5$, para a esfera ser tangente ao plano xOz e ter centro em C , o raio terá de ser 5.

Uma condição que define a esfera é $(x+8)^2 + (y-5)^2 + (z-6)^2 \leq 25$.

6.3. $p \Leftrightarrow V; q \Leftrightarrow V$ e $r \Leftrightarrow F$

r é uma proposição falsa, pois, para M pertencer ao plano mediador de $[AB]$, teria de se verificar $d(M, A) = d(M, B)$.

No entanto:

$$d(M, A) = \sqrt{(0-0)^2 + (4-2)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

e:

$$d(M, B) = \sqrt{(0+2)^2 + (4-4)^2 + (3-4)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Assim, $p \Rightarrow \sim(q \vee r)$ é uma proposição falsa, pois:

$$(V \Rightarrow \sim(V \vee F)) \Leftrightarrow (V \Rightarrow \sim V)$$

$$\Leftrightarrow (V \Rightarrow F)$$

$$\Leftrightarrow F$$

7. Opção (C)

Para o polinómio $P(x)$ ser de grau 4, tem que $k - 2 \neq 0$ e para que $P(x)$ admita zero como raiz simples tem que $4 - k^2 = 0$.

Assim:

$$\begin{aligned} k - 2 \neq 0 \quad \wedge \quad 4 - k^2 = 0 &\Leftrightarrow k \neq 2 \quad \wedge \quad k^2 = 4 \\ &\Leftrightarrow k \neq 2 \quad \wedge \quad (k = 2 \vee k = -2) \\ &\Leftrightarrow k = -2 \end{aligned}$$

8. Opção (A)

A proposição (I) é falsa, visto o eixo das ordenadas não ser eixo de simetria do respetivo gráfico cartesiano.

A proposição (II) é falsa, visto não se tratar de uma função injetiva, já que existem objetos diferentes com a mesma imagem (note-se, por exemplo, que existem três zeros da função).

9.

9.1. Observe-se que $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$ e $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB}$.

Assim:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CB} = \\ &= \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC} + \underbrace{\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CB}} = \\ &= 2\overrightarrow{DC} \quad + \quad \vec{0} = \\ &= 2\overrightarrow{DC} \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

9.2. $V = \frac{1}{3}A_b \times h$, onde $A_b = d^2$ e $h = a - b$

$$d^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$$

$$\begin{aligned} d^2 &= \left(\frac{2}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}\right)^2 + \left(\frac{2}{\sqrt{a-\sqrt{b}}}\right)^2 \Leftrightarrow d^2 = \frac{4}{(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2} + \frac{4}{(\sqrt{a-\sqrt{b}})^2} \\ &\Leftrightarrow d^2 = \frac{4(\sqrt{a-\sqrt{b}})^2 + 4(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2}{(\sqrt{a+\sqrt{b}})^2 \times (\sqrt{a-\sqrt{b}})^2} \\ &\Leftrightarrow d^2 = \frac{4(a-2\sqrt{ab}+b) + 4(a+2\sqrt{ab}+b)}{((\sqrt{a+\sqrt{b}}) \times (\sqrt{a-\sqrt{b}}))^2} \\ &\Leftrightarrow d^2 = \frac{4(a-2\sqrt{ab}+b+a+2\sqrt{ab}+b)}{((\sqrt{a})^2 - (\sqrt{b})^2)^2} \\ &\Leftrightarrow d^2 = \frac{4(2a+2b)}{(a-b)^2} \\ &\Leftrightarrow d^2 = \frac{8(a+b)}{(a-b)^2} \end{aligned}$$

Assim:

$$V = \frac{1}{3} \times \frac{8(a+b)}{(a-b)^2} \times (a-b) = \frac{8(a+b)}{3(a-b)}, \quad \text{c.q.d.}$$