www.esffranco.edu.pt

(2016/2017)

6.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 14

3.º Período 05/06/17 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. O colombiano James Rodriguez é um jogador profissional de futebol e, segundo o sítio www.goalpoint.pt, era, até setembro de 2016, o jogador mais eficaz a nível de remates enquadrados com a baliza (de fora da área).

Nesse estudo, James Rodriguez convertia em golo 15% dos remates.

Suponha-se que, num outro jogo de futebol, o colombiano vai rematar quatro vezes de fora da área.

Mantendo a mesma eficácia, qual é a probabilidade, com três casas decimais, de ele marcar, exatamente, dois golos?

(A) $0{,}048$ **(B)** $0{,}098$ **(C)** $0{,}135$ **(D)** $0{,}305$

2. Seja a um número real tal que $\ln a = 6$.

Qual é o valor de $\ln\sqrt{8a}$?

(A) $\frac{3+\ln 2}{2}$ **(B)** $\frac{3+\ln 8}{2}$ **(C)** $3\left(1+\ln\sqrt{6}\right)$ **(D)** $3\left(1+\ln\sqrt{2}\right)$

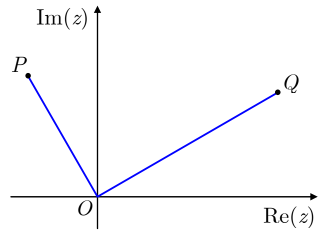
3. Considere, no conjunto $\mathbb{C}$, o complexo $z=(1+2ki)(1+8ki)$, sendo k um número real.

Sabendo que a imagem geométrica de z não pertence nem ao eixo real nem ao eixo imaginário, qual dos seguintes pode ser o valor de k?

(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** -3 **(C)** 0 **(D)** $\frac{1}{4}$

4. Considere, no plano complexo da figura:

- o ponto P, imagem geométrica do número $z=-2+2\sqrt{3}\,i$;
- o ponto Q, no primeiro quadrante, e imagem geométrica de um número w de módulo 6.

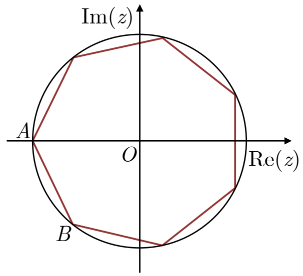


Sabendo que os segmentos $[OP]$ e $[OQ]$ são perpendiculares, qual dos números seguintes é w?

(A) $3+3\sqrt{3}\,i$ **(B)** $4+2\sqrt{5}\,i$

(C) $3\sqrt{3}+3i$ **(D)** $2\sqrt{5}+4i$

5. No plano complexo da figura, está representado um heptágono regular inscrito numa circunferência centrada na origem e de raio π.



Tal como é sugerido pela figura:

- o vértice A do heptágono pertence ao semieixo negativo real;
- o vértice B do heptágono é o único do terceiro quadrante.

Qual dos seguintes números complexos tem por imagem geométrica o vértice B?

(A) $7\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{7}\right)$ **(B)** $7\operatorname{cis}\left(\frac{26\pi}{21}\right)$ **(C)** $\pi\operatorname{cis}\left(\frac{9\pi}{7}\right)$ **(D)** $\pi\operatorname{cis}\left(\frac{26\pi}{21}\right)$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere a função f, derivável em $\mathbb{R}$, e cuja primeira derivada está definida por

$f'(x)=2\sqrt{2}\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)+x$.

Resolva os itens seguintes recorrendo a métodos analíticos.

1.1. Para um certo número real α, tem-se que $\operatorname{tg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)=-\sqrt{8}$, com $-\pi<\alpha<\pi$.

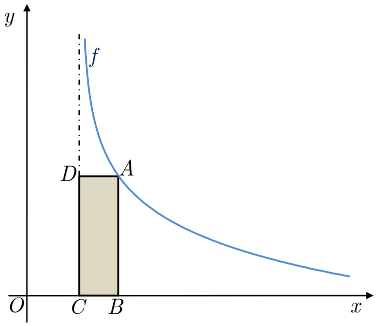
Determine o valor exato de $f'(\alpha)-\alpha$.

1.2. Determine a abcissa do único ponto de inflexão do gráfico de f no intervalo $[0,2\pi]$.

2. Considere a função f, de domínio $]1,+\infty[$, definida por $f(x)=2-\ln(x-1)$.

2.1. Sem usar a calculadora, mostre que o eixo das abcissas é a única assíntota horizontal do gráfico da função, de domínio $]1,+\infty[$, definida por $g(x)=\frac{f(x)}{x}$.

2.2. Considere agora parte do gráfico de f no referencial cartesiano ao lado e o retângulo $[ABCD]$.



Tal como sugere a figura:

- o ponto A pertence ao gráfico de f;
- o ponto B pertence ao eixo Ox e tem a mesma abcissa de A;
- o ponto C pertence ao eixo Ox;
- o ponto D tem a mesma ordenada de A;
- a reta CD é a assíntota do gráfico de f.

Seja a a função, de domínio $]0,8[$, que faz corresponder, à abcissa x do ponto A, a área do retângulo $[ABCD]$.

Mostre que $a'(x)=1-\ln(x-1)$ e, recorrendo a métodos analíticos, indique a abcissa do ponto A de modo que a área do retângulo $[ABCD]$ seja máxima.

3. Considere, para um certo número real k, a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por

$$g(x)=\begin{cases}\log_4(10-2x)+k & \text{se } x\leq 4\\ \dfrac{\text{sen}(x-4)}{4x-x^2} & \text{se } x>4\end{cases}.$$

3.1. Sem usar a calculadora, determine k de modo que a função g seja contínua em $x=4$.

3.2. Considerando agora $k=0$, resolva, recorrendo à calculadora gráfica, no intervalo $]-\infty,4]$, a condição $g(x)\geq \ln(x)$.

Reproduza, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, e indique as coordenadas de pontos relevantes com arredondamento às centésimas.

4. Em $\mathbb{C}$, considere o número complexo $z=\frac{2i^{99}-6}{1+2i}$.

Resolva os itens seguintes sem usar a calculadora.

4.1. Mostre que:

4.1.1. $\bar{z}=\sqrt{8}\,\text{cis}\left(\frac{5\pi}{4}\right)$;

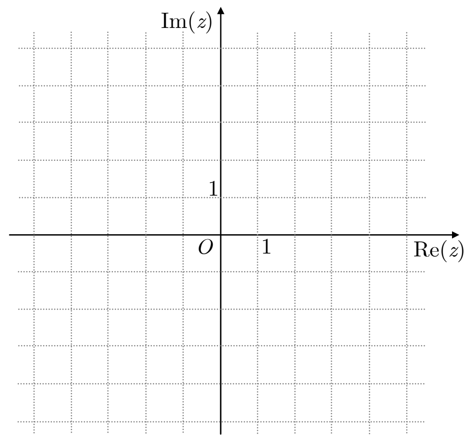
4.1.2. $\bar{z}$ é uma raiz quarta de -64.

4.2. Determine, na forma trigonométrica, as raízes cúbicas de $\bar{z}$.

5. Em $\mathbb{C}$, considere o número complexo $w=2-i$.

5.1. Esboce, no plano complexo ao lado, a região do plano definido pela seguinte condição:

$$|z-w|\leq 3 \wedge 0\leq \text{Arg}(z-w+2)\leq \frac{\pi}{4}$$



5.2. Determine o valor de α pertencente ao intervalo $]0,\pi[$, de modo que seja real o seguinte número:

$$\frac{w-2}{\text{cis}\left(\frac{\pi}{5}-\alpha\right)}$$

6. Considere, no conjunto dos números complexos $\mathbb{C}$, os seguintes números:

$z=\text{sen}\,\alpha$ e $w=\text{tg}\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)-i$, $\alpha\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

Mostre que $z\times w=\text{cis}(\alpha+\pi)$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	1................30 1.1.....17 1.2.....13	2................26 2.1.......9 2.2.....17	3................26 3.1.....13 3.2.....13	4................39 4.1.1..13 4.1.2....9 4.2.....17	5................26 5.1.....13 5.2.....13	6................13

Formulário

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Trigonometria

$\mathrm{sen}(a+b) = \mathrm{sen}\ a \ \cos b + \mathrm{sen}\ b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \mathrm{sen}\ a \ \mathrm{sen}\ b$

$\mathrm{tg}(a+b) = \frac{\mathrm{tg}\,a+\mathrm{tg}\,b}{1-\mathrm{tg}\,a\,\mathrm{tg}\,b}$

Complexos

$(\rho cis\theta)^n = \rho^n \mathrm{cis}(n\theta)$

$\sqrt[n]{\rho \mathrm{cis}\,\theta} = \sqrt[n]{\rho}\mathrm{cis}\left(\frac{\theta+2\pi k}{n}\right) \quad (k \in \{0,\ldots,n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u'+v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\mathrm{sen}\,u)' = u'\cos u$

$(\cos u)' = -u'\mathrm{sen}\,u$

$(\mathrm{tg}\,u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$