www.esffranco.edu.pt

(2016/2017)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 14

3.º Período | 09/05/17 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Em março de 2017, a UEFA divulgou uma lista com os jogadores de futebol profissional que têm mais jogos em competições da UEFA.

Dessa lista de jogadores, sabe-se que:

- 24% são guarda-redes;
- 44% ainda estão em atividade;
- dos que ainda estão em atividade, 4 em 11 são guarda-redes.

Escolhe-se, ao acaso, um dos jogadores da lista.

Qual é a probabilidade de ele ser um guarda-redes que já não está em atividade?

(A) 4% **(B)** 8% **(C)** 12% **(D)** 16%

2. Utilizando os algarismos do conjunto $A=\{1,2,3,4,5,8,9\}$, quantos números de três algarismos é possível formar de modo que esses números sejam múltiplos de 5?

(A) 49 **(B)** 56 **(C)** 63 **(D)** 343

Adaptado do Caderno de Apoio às Metas Curriculares, 12.º ano

3. Considere:

- a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\log_5 x$;
- a progressão geométrica (a_n) de termos positivos e tal que $a_1=2 \wedge a_3=\frac{9}{8}$.

Qual é o valor de $\lim f(a_n)$?

(A) $+\infty$ **(B)** $-\infty$ **(C)** 2 **(D)** 0

4. Considere uma função g, derivável em $[0,5[$, tal que $g(0)=-g(5)$.

Qual das seguintes é uma afirmação necessariamente verdadeira?

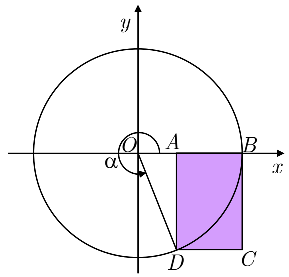
(A) $g(0)-g(5)=0$.

(B) $g'(5)=-\infty$.

(C) g não tem zeros em $]0,5[$.

(D) Não se pode aplicar o Teorema de Bolzano ao intervalo $[0,5]$.

5. Considere, na figura ao lado, o círculo trigonométrico e o retângulo $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Ox e tem abcissa inferior a 1;
- o ponto B tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto C tem abcissa 1 e pertence ao quarto quadrante;
- o ponto D pertence à circunferência e tem a mesma abcissa de A;
- as retas AB e CD são paralelas;
- α é a amplitude do ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}D$;
- $\alpha \in \left]\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right[$.

Qual das expressões seguintes dá a área do retângulo $[ABCD]$, em função de α?

(A) $\frac{\cos(2\alpha)-2\cos\alpha}{2}$ **(B)** $\frac{\operatorname{sen}(2\alpha)-2\operatorname{sen}\alpha}{2}$ **(C)** $\cos(2\alpha)+\cos\alpha$ **(D)** $\operatorname{sen}(2\alpha)+\operatorname{sen}\alpha$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

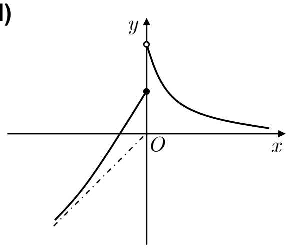
Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja h uma função de domínio $\mathbb{R}$ e tal que:

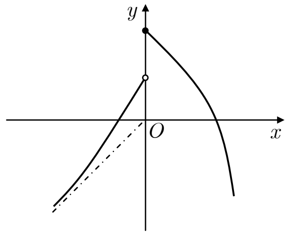
- $\lim\limits_{x\to-\infty}[h(x)-x]=0$;
- h tem um máximo relativo para $x=0$;
- $h''(x)>0$ para $x>0$.

Apenas uma das opções seguintes pode representar parte do gráfico da função h.

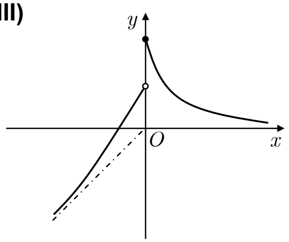
I)



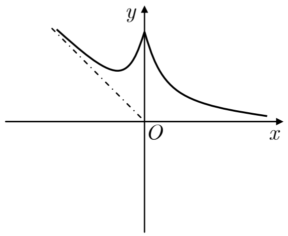
II)



III)



IV)



Elabore uma composição na qual:
- indique a opção que pode representar h.
- apresente três razões para rejeitar as restantes opções, uma por cada opção rejeitada.

2. Stephen Curry foi eleito o jogador Mais Valioso da NBA em 2016 e em 2015.

Admita que, num jogo de basquetebol, Stephen Curry fez um passe para um colega de equipa (Golden State Warriors).

Admita ainda que, a altura da bola (em metros) foi dada, t segundos após ela partir até chegar ao colega, pela função definida por

$$h(t)=2+\frac{2}{\pi}\operatorname{sen}(\pi t)+\sqrt{2}\,t\,,\ t\in[0,1].$$

2.1. O colega de Stephen Curry conseguiu apanhar a bola apesar da altura que ela levava.

Calcule-a, apresentando o resultado em metros, arredondado às décimas.

2.2. Usando exclusivamente processos analíticos, determine após quantos segundos a bola atingiu a altura máxima.

3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-e^{-3}}{x+3} & \text{se } x<-3\\ x\cos(\pi x) & \text{se } x\geq-3\end{cases}$.

Resolva os itens **3.1.** e **3.2.** sem usar a calculadora.

3.1. Estude a continuidade da função g em $x=-3$.

3.2. Considere a reta r, tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{1}{2}$.

Calcule o declive da reta t, reta perpendicular a r.

3.3. Considere agora a restrição de g em $[0,2]$ e o triângulo $[ABC]$ tal que:
- a abcissa do ponto A é um zero positivo de g;
- a abcissa do ponto B é outro zero positivo de g;
- a ordenada do ponto C é o mínimo absoluto de g nesse intervalo.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a área do triângulo $[ABC]$.

Na sua resposta, deve:
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- esboçar o triângulo $[ABC]$;
- indicar as abcissas dos pontos A e B;
- indicar as coordenadas do ponto C com arredondamento às centésimas;
- determinar o valor pedido, arredondado às centésimas.

4. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases}2x^2+2\operatorname{sen}(2x) & \text{se } x<0\\ \ln\left(3e^x+2\right) & \text{se } x\geq 0\end{cases}$.

Resolva os itens seguintes, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

4.1. O gráfico da função f tem uma assíntota oblíqua quando x tende para $+\infty$, de equação $y=x+b$, com $b\in\mathbb{R}$.

Determine b.

4.2. Mostre que, no intervalo $\left]-\frac{3\pi}{4},0\right[$, $f''(x)=4-8\operatorname{sen}(2x)$ e estude o gráfico da função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão, recorrendo a métodos analíticos, sem utilizar a calculadora.

Na sua resposta, indique:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para cima;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico da função f tem concavidade voltada para baixo;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico da função f.

5. É dada a função, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, definida por $f(x)=\frac{(\operatorname{tg}^2x+1)\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{tg}^2x-1}$.

5.1. Mostre que, $\forall x\in\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, $f(x)=-\operatorname{tg}(2x)$.

5.2. Considere a função, de domínio $\left]0,\frac{\pi}{4}\right[$, definida por $g(x)=-\frac{f(x)}{x}$.

Sem usar a calculadora, estude a função g quanto à existência de assíntotas do seu gráfico.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	1................16	2................29 2.1........10 2.2........19	3................48 3.1........16 3.2........16 3.3........16	4................35 4.1........16 4.2........19	5................32 5.1........16 5.2........16

Formulário

Progressões

Soma dos *n* primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1+u_n}{2}\times n$

Progressão geométrica: $u_1\times\frac{1-r^n}{1-r}$

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen}a\cos b+\operatorname{sen}b\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\cos b-\operatorname{sen}a\operatorname{sen}b$

$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg}a+\operatorname{tg}b}{1-\operatorname{tg}a\operatorname{tg}b}$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e\quad(n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty\quad(p\in\mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=nu^{n-1}u'\quad(n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen}u)'=u'\cos u$

$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen}u$

$(\operatorname{tg}u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'e^u$

$(a^u)'=u'a^u\ln a\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a}\quad(a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$