Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2016/2017)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 14

2.º Período 14/03/17 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Não apresente cálculos, nem justificações.

1. Recentemente, realizou-se o campeonato europeu de pista coberta em atletismo, disputado em Belgrado.

1.1. A média dos pontos obtidos pelos atletas no heptatlo masculino foi 5942. Admita que o total de pontos de cada atleta na prova é uma variável aleatória X com distribuição normal, com esse valor médio.

Sabe-se que $P(X < 5900) = 28\%$.

Escolhe-se, ao acaso, um dos atletas participantes do heptatlo disputado em Belgrado e verifica-se a sua pontuação.

Considere os acontecimentos:

A : «o atleta fez mais de 5900 pontos»

B : «o atleta fez menos de 5942 pontos»

Qual é o valor de $P(A \mid B)$?

(A) 22% **(B)** 36% **(C)** 44% **(D)** 58%

1.2. Sabe-se que, nesse campeonato, havia 10 atletas portugueses e 34 espanhóis.

Admita que, num dia, 10 atletas do mesmo país (Portugal ou Espanha) foram vistos a entrar no campo de treino.

Qual é a probabilidade de terem sido todos portugueses?

(A) $\dfrac{10!}{{}^{34}C_{10} + 10!}$ **(B)** $\dfrac{1}{{}^{34}C_{10} + 1}$ **(C)** $\dfrac{1}{{}^{44}C_{10}}$ **(D)** $\dfrac{10}{{}^{34}C_{10}}$

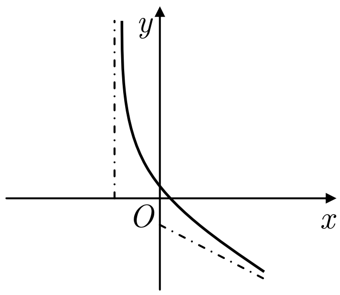
2. Seja h uma função de domínio $]m,+\infty[$, $m \in \mathbb{R}$.

Sabe-se que:

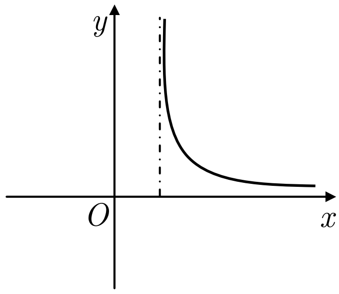
- $x = m$ é a equação da assíntota vertical do gráfico de h ;
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{h(x)}{x} = m$.

Qual das opções seguintes pode representar parte do gráfico da função h ?

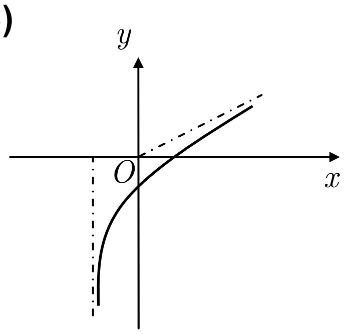
(A)



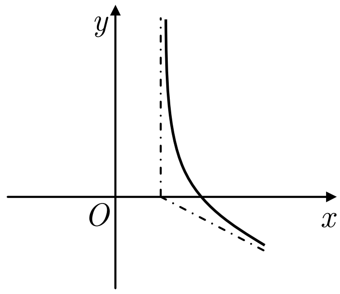
(B)



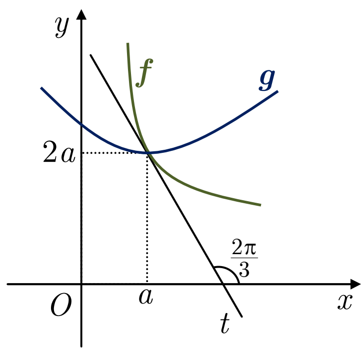
(C)



(D)



3. Considere, no referencial o.n. xOy do lado, parte dos gráficos das funções f e g, ambas deriváveis em $\mathbb{R}$.



Tal como sugere a figura:

- a reta t tem inclinação $\frac{2\pi}{3}$ e é tangente ao gráfico da função f no ponto de coordenadas $(a, 2a)$, $a > 0$;
- $2a$ é um mínimo relativo da função g .

Sabendo que $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = -1$, qual é o valor de a ?

(A) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **(B)** $\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ **(C)** $\sqrt{3}$ **(D)** $\sqrt{3}+1$

4. Considere uma função g, derivável em $\mathbb{R}$, e tal que $y=-x+6$ é a equação da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 2.

Qual das seguintes é uma proposição falsa?

(A) $g'(2)=-1$ **(B)** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=4$ **(C)** $\lim\limits_{x\to 2} g(x)=6$ **(D)** $\lim\limits_{x\to 2} \frac{g(x)-4}{x^2-4}=-\frac{1}{4}$

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A dona Josete estava na sua sala de estar aquecida e teve de sair à rua durante alguns minutos, deixando a porta aberta.

Quando ela regressou à sala, estava com frio pelo que aumentou a temperatura do aquecedor.

Suponha que a função que dá a temperatura, em graus Celsius, t minutos após a dona Josete ter ido à rua, é dada por

$$c(t)=\begin{cases} \frac{t^3}{6}-t^2+26 & \text{se } 0\le t<4 \\ \frac{62}{3}+\frac{2t^2-20t+48}{t^2-36} & \text{se } 4\le t<6 \\ 32-\frac{\sqrt{4t^2-23}}{t-5} & \text{se } t\ge 6 \end{cases}$$

Resolva os itens seguintes usando métodos analíticos. Se usar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, duas casas decimais.

1.1. Mostre que a função c é contínua em $[0,+\infty[$.

1.2. Mostre que, durante os primeiros 5 minutos após a dona Josete ter saído para a rua, houve, pelo menos, um instante em que a temperatura da sala foi 22 graus Celsius.

1.3. Depois de a dona Josete regressar à sala, fechou a porta pelo que, com o decorrer do tempo, a temperatura da sala tende a igualar a temperatura ambiente (da sala).

Indique, justificando, essa temperatura ambiente (em graus Celsius).

2. Considere as funções, de domínio $]-1,+\infty[$, definidas por $f(x)=4x-\ln(x+1)$ e $g(x)=e^{f(x)}$.

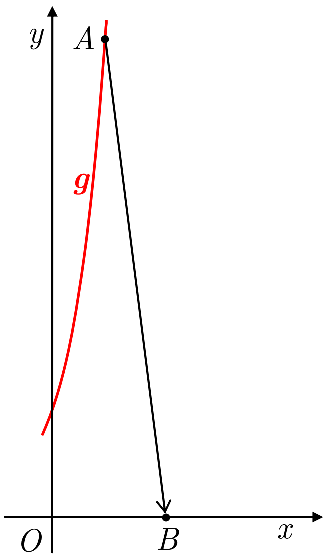
Resolva os itens **2.1.** e **2.2.** sem usar a calculadora.

2.1. Verifique que o gráfico da função f tem apenas uma assíntota e indique a sua equação.

2.2. Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve apresentar:
- o(s) intervalo(s) em que a função g é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função g é decrescente;
- os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos, caso existam.

2.3. No referencial o.n. xOy do lado está parte do gráfico da função g e os pontos A e B.



Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao gráfico de g e tem abcissa positiva;
- o ponto B pertence ao eixo Ox e tem abcissa 1;
- $\left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{20}$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a abcissa de A.

Na sua resposta:

- equacione o problema;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, que lhe permite(m) resolver a equação;
- apresente a abcissa do ponto A arredondada às centésimas.

3. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=e^{6-2x}$.

3.1. Mostre, aplicando a definição de derivada num ponto, que $f'(3)=-2$.

3.2. Seja t a reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 3.

Sem usar a calculadora, determine a abcissa do ponto de interseção de t com o eixo Ox.

3.3. Considere agora a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\dfrac{4x}{f(x)}$.

Mostre que o eixo Ox é uma assíntota do gráfico de g quando $x\to-\infty$.

4. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}^+\setminus\{1\}$, definida por $f(x)=\dfrac{1}{\ln x}$.

Aplicando a regra de derivação da função composta, mostre que $f'(x)=-\dfrac{1}{x\ln^2 x}$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	1......................50 1.1..........18 1.2..........14 1.3..........18	2......................50 2.1..........18 2.2..........18 2.3..........14	3......................42 3.1..........14 3.2..........14 3.3..........14	4......................18

Formulário

Probabilidades

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$