www.esffranco.edu.pt

(2016/2017)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 14

2.º Período 07/02/17 Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

VERSÃO 1

Grupo I

Na resposta a cada um dos itens deste grupo, selecione a única opção correta.

Escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

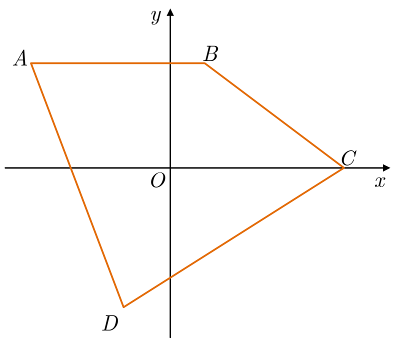
Não apresente cálculos, nem justificações.

1. No desenvolvimento do binómio $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, com $n \in \mathbb{N} \wedge x \in \mathbb{R}^+$, sabe-se que o termo que não depende da variável x é igual a 924.

Qual é valor de n?

(A) 9 **(B)** 10 **(C)** 11 **(D)** 12

2. No referencial o.n. xOy da figura, está representado o papagaio $[ABCD]$.



Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-4,3)$;
- o ponto B tem coordenadas $(1,3)$;
- o ponto C tem coordenadas $(5,0)$;
- o ponto D tem coordenadas $\left(-\frac{4}{3},-4\right)$.

Escolhem-se, ao acaso, dois vértices do papagaio.

Qual é a probabilidade de eles definirem uma reta de declive não positivo?

(A) $\frac{1}{3}$ **(B)** $\frac{2}{3}$ **(C)** 0 **(D)** 1

3. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=1-e^{x+5}$.

3.1. O gráfico de f interseta a reta de equação $y=-2$ num ponto.

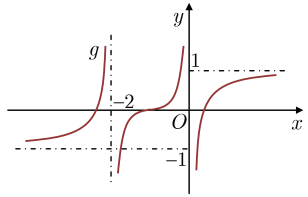
Qual é a abcissa desse ponto?

(A) $\ln 3-5$ **(B)** $\ln 3-1$ **(C)** $\log_2 e-5$ **(D)** $\log_2 e-1$

3.2. Quanto ao valor de $\lim\limits_{x\to -5}\frac{f(x)}{(x+5)^3}$:

(A) é igual a $-\infty$. **(B)** é igual a $+\infty$. **(C)** é igual a 0. **(D)** não existe.

4. Considere, no referencial o.n. xOy do lado, o gráfico da função g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{-2,0\}$, e as respetivas assíntotas, de equações $x=-2$, $x=0$, $y=-1$ e $y=1$.



Considere ainda as sucessões de números reais de termos gerais $a_n=\frac{n^4}{1{,}5^n}$ e $b_n=\log\left(\frac{1}{n}\right)$.

Quais são, respetivamente, os valores de $\lim g(a_n)$ e $\lim g(b_n)$?

(A) $-\infty$ e -1 **(B)** $-\infty$ e 1 **(C)** $+\infty$ e -1 **(D)** $+\infty$ e 1

Grupo II

Nas respostas a cada um dos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Atenção: quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Seja Ω o espaço de resultados associado a uma certa experiência aleatória e sejam A e B dois acontecimentos possíveis de Ω.

Sabe-se que:

- $P(A)=0{,}6$;
- $P(A\cap B)=0{,}3$;
- $P(A\mid \overline{B})=0{,}5$.

1.1. Mostre que $P(B)=0{,}4$.

Os acontecimentos A e B são independentes? Justifique a resposta.

1.2. Determine $P(\overline{A}\cap\overline{B})$.

2. Considere a função, de domínio $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$, definida por $f(x)=\dfrac{2\log_3(6x+3)-\log_2\left(\frac{1}{16}\right)}{2}$.

Resolva os itens seguintes usando processos exclusivamente analíticos.

2.1. Mostre que $f(x)=\log_3(2x+1)+3$.

2.2. Caracterize a função inversa de f.

Na sua resposta deve:

• indicar o domínio da função f^{-1};

• indicar o contradomínio da função f^{-1};

• apresentar $f^{-1}(x)$ de forma simplificada.

2.3. Apresente, na forma de intervalo ou união de intervalos de números reais, o conjunto solução da condição $f(x)\leq\log_3(6-x)+1$.

3. Uma empresa construiu um hotel e prevê que, t anos após o início de 2016, os lucros desse hotel sejam dados, em milhões de euros, pela função definida por

$$l(t)=\frac{10-38e^{-0,2t}}{3+e^{-0,2t}}$$

3.1. Quais são os lucros previstos pela empresa no início de 2026?

Apresente o resultado em milhões de euros, arredondado às centésimas.

3.2. Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), responda à seguinte questão:

Segundo este modelo, no decorrer de que ano se prevê que os lucros da empresa sejam iguais a $2\,000\,000$ *euros?*

Se usar cálculos intermédios, considere, pelo menos, três casas decimais.

4. Considere a função, de domínio $[-7,+\infty[\setminus\{2\}$, definida por $g(x)=\begin{cases}\dfrac{2x-x^2}{\sqrt{x+7}-3} & \text{se } -7\leq x<2\\[2mm] \dfrac{\ln(x-1)}{5x-10} & \text{se } x>2\end{cases}$.

Resolva os itens **4.1.** e **4.2.** sem usar a calculadora.

4.1. Sem recorrer à calculadora, averigue se existe $\lim\limits_{x\to 2} g(x)$.

4.2. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

4.3. Considere agora a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=-x^5$.

Além da origem, os gráficos de g e h intersetam-se em dois pontos em $[-2,2[$.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine as coordenadas desses pontos.

Na sua resposta, deve:

• reproduzir, num referencial, os gráficos das funções g e h no intervalo $[-2,2[$;

• indicar as coordenadas pedidas com arredondamento às centésimas.

5. Mostre que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{4+\log_5 x}{2\log_3 x}=\log_5\sqrt{3}$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I (40 pontos)	Cada resposta certa: 8	Cada questão errada, não respondida ou anulada: 0

Grupo II (160 pontos)	1................25 1.1........14 1.2........11	2................46 2.1........14 2.2........14 2.3........18	3................29 3.1........11 3.2........18	4................46 4.1........18 4.2........14 4.3........14	5................14

Formulário

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$