Teste de Matemática A

2016 / 2017

Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

11.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ______________________________ N.º: ____ Turma: ____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

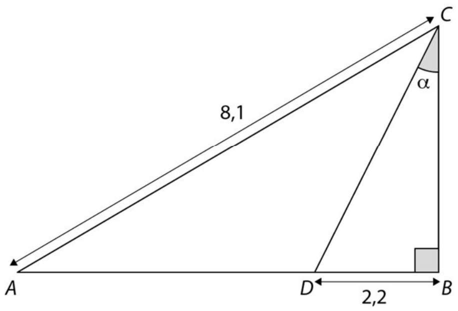
1. Na figura está representado um triângulo retângulo $[ABC]$.

O ponto D pertence ao segmento de reta $[AB]$.

α representa a amplitude, em graus, do ângulo DCB.

Sabe-se que:

- $\overline{AC} = 8{,}1$
- $\overline{DB} = 2{,}2$
- $\sin\alpha = \frac{1}{3}$



Qual dos seguintes é, aproximadamente, o valor da área do triângulo $[ADC]$?

(A) 6,57

(B) 9,29

(C) 16,13

(D) 18,58

2. Quantas são as soluções da equação $\sin^2 x - \sin x = 0$ que pertencem ao intervalo $[0, 10\pi]$?

(A) 3

(B) 12

(C) 15

(D) 16

3. Considere, num referencial o.n. xOy, a reta r que interseta o eixo Ox no ponto de abcissa $\sqrt{3}$ e que interseta o eixo Oy no ponto de ordenada 1. Seja α a inclinação da reta r.

Qual é o valor de $\tan(-\alpha)$?

(A) $-\sqrt{3}$

(B) $\sqrt{3}$

(C) $\frac{\sqrt{3}}{3}$

(D) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$

4. De um triângulo isósceles $[ABC]$, sabe-se que:

- $\overline{AB} = \overline{AC} = 5$;
- os ângulos iguais têm 30° de amplitude.

Qual das afirmações seguintes é verdadeira?

(A) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{25}{2}$

(B) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = -\frac{25}{2}$

(C) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = \frac{25}{2}$

(D) $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{25}{2}$

5. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido por:

$$(x, y, z) = (1, 0, 2) + s(-3, 2, 3) + t(3, -1, -2), s, t \in \mathbb{R}$$

Seja r a reta perpendicular ao plano α e que contém o ponto de coordenadas $(1, -1, 2)$.

Qual das condições seguintes pode definir a reta r?

(A) $(x, y, z) = (1, -1, 2) + k(1, -3, 3), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y, z) = (1, -1, 2) + k(-3, 2, 3), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y, z) = (1, 0, 2) + k(-3, 2, 3), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y, z) = (1, 0, 2) + k(1, -3, 3), k \in \mathbb{R}$

Grupo II

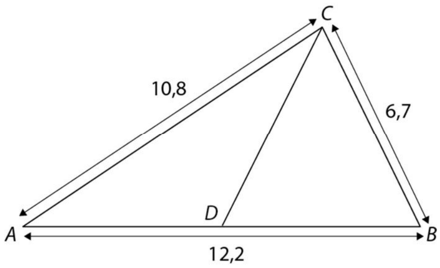
Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere o triângulo $[ABC]$ da figura.

Sabe-se que:

- $\overline{AB} = 12{,}2$
- $\overline{BC} = 6{,}7$
- $\overline{AC} = 10{,}8$
- D é o ponto médio de $[AB]$.



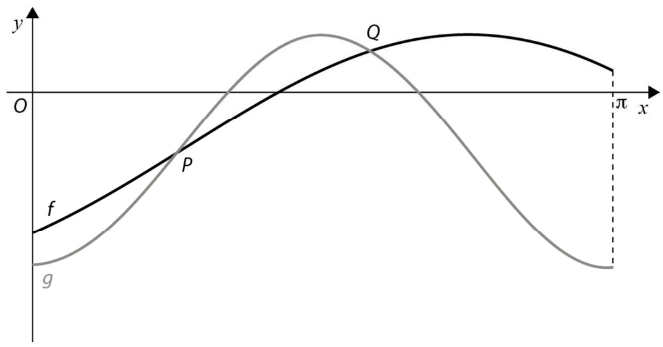
Determine o comprimento do segmento de reta $[CD]$.

Apresente o resultado arredondado às décimas. Sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, três casas decimais.

2. Na figura encontram-se as representações gráficas de duas funções f e g, de domínio $[0, \pi]$, definidas por:

- $f(x) = 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1$
- $g(x) = -2\cos\,(2x) - 1$

P e Q são os pontos de interseção dos gráficos de f e de g.

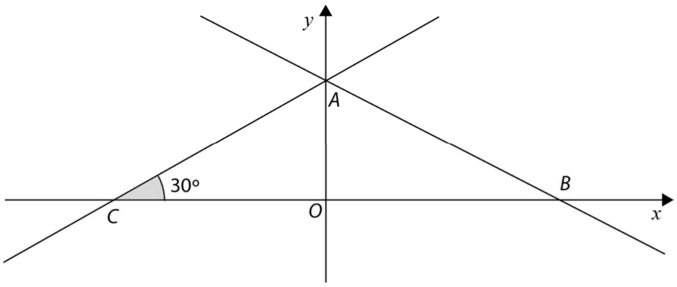


2.1. Determine os zeros da função g.

2.2. Determine as abcissas dos pontos P e Q.

2.3. Seja $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$ tal que $f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$. Determine o valor de $g\left(\frac{\alpha}{2}\right)$.

3. Na figura estão representadas, num referencial o.n. xOy, as retas AB e AC.



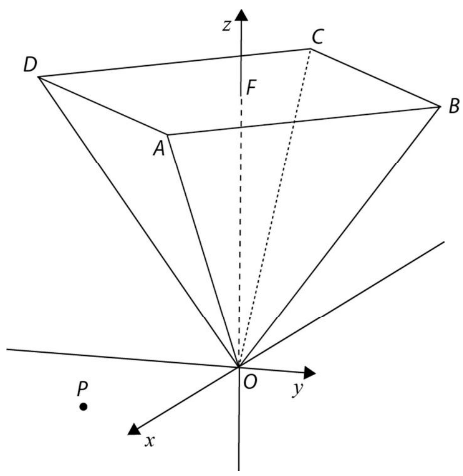
O ponto A tem coordenadas (0, 2) e o ponto B tem coordenadas (4, 0). A reta AC faz um ângulo de 30º com a reta de equação $y = 0$.

3.1. Escreva uma equação vetorial da reta AB.

3.2. Determine a equação reduzida da reta AC.

3.3. Calcule a amplitude, em graus, do ângulo formado pelas retas AB e AC. Apresente o resultado arredondado às centésimas. Sempre que proceder a arredondamentos, conserve, no mínimo, quatro casas decimais.

4. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[OABCD]$. Seja F o centro da base da pirâmide. Os pontos A e C pertencem ao plano xOz. Os pontos B e D pertencem ao plano yOz. Uma equação da reta OA é $(x, y, z) = (9, 0, 12) + r(3, 0, 4), r \in \mathbb{R}$ e da reta AB é $(x, y, z) = (5, 1, 8) + s(-1, 1, 0), s \in \mathbb{R}$.



4.1. Mostre que A é o ponto de coordenadas (6, 0, 8).

4.2. Escreva uma equação vetorial que defina o plano ABO.

4.3. Determine uma equação cartesiana do plano perpendicular à reta AB e que contém o ponto P de coordenadas (2, −4, −1).

4.4. Identifique e apresente uma condição do lugar geométrico dos pontos $Q(x, y, z)$ do espaço tais que $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$.

– FIM –

COTAÇÕES

Grupo I 50

Cada resposta certa 10

Cada resposta errada.. 0

Cada questão não respondida ou anulada............................... 0

Grupo II 150

1\. 15

2\. 45

2.1. 15

2.2. 15

2.3. 15

3\. 35

3.1. 10

3.2. 10

3.3. 15

4\. 55

4.1. 15

4.2. 10

4.3. 15

4.4. 15

TOTAL 200

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (B)

$$\frac{\sin\alpha}{2{,}2}=\frac{\sin(90°-\alpha)}{\overline{BC}}\Leftrightarrow\frac{\frac{1}{3}}{2{,}2}=\frac{\cos\alpha}{\overline{BC}}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC}=\frac{2{,}2\cos\alpha}{\frac{1}{3}}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC}=6{,}6\cos\alpha$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC}=6{,}6\times\frac{2\sqrt{2}}{3}$$
$$\Leftrightarrow \overline{BC}=4{,}4\sqrt{2}$$

Cálculo auxiliar

$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha\Leftrightarrow\cos^2\alpha=1-\frac{1}{9}\Leftrightarrow\cos^2\alpha=\frac{8}{9}$

Logo, $\cos\alpha=\frac{2\sqrt{2}}{3}$.

Pelo Teorema de Pitágoras:

$8{,}1^2=\left(4{,}4\sqrt{2}\right)^2+\overline{AB}^2\Leftrightarrow\overline{AB}^2=65{,}61-38{,}72\Leftrightarrow\overline{AB}^2=26{,}89$

Logo, $\overline{AB}=\sqrt{26{,}89}$.

Tem-se assim que $\overline{AD}=\sqrt{26{,}89}-2{,}2$.

Logo:

$A_{[ADC]}=\frac{\left(\sqrt{26{,}89}-2{,}2\right)\times4{,}4\sqrt{2}}{2}\approx 9{,}29$ u.a.

2. Opção (D)

$$\sin^2x-\sin x=0\Leftrightarrow\sin x(\sin x-1)=0$$
$$\Leftrightarrow\sin x=0\vee\sin x=1$$
$$\Leftrightarrow x=k\pi\vee x=\frac{\pi}{2}+2k\pi,k\in\mathbb{Z}$$

No intervalo $[0,2\pi[$, a equação tem três soluções: $0,\frac{\pi}{2}$ e π.

Assim, no intervalo $[0,10\pi[$, a equação tem $3\times5=15$ soluções.

Como 10π é também solução da equação, e pertence ao intervalo $[0,10\pi]$, então a equação tem 16 soluções.

3. Opção (C)

Os pontos de coordenadas $(\sqrt{3}, 0)$ e $(0, 1)$ pertencem à reta r. Logo, o declive da reta r é dado por:

$m = \frac{1-0}{0-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\frac{\sqrt{3}}{3} = \tan \alpha$

Então, $\tan(-\alpha) = -\tan \alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

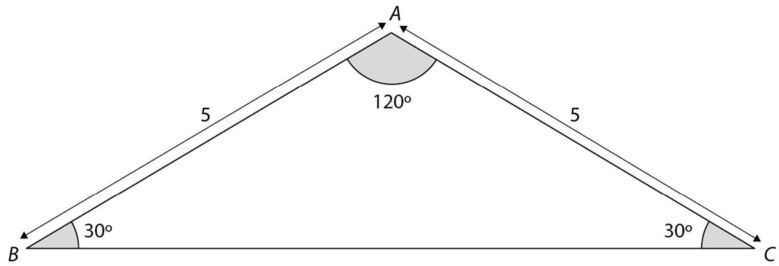
4. Opção (D)

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 5 \times \cos 120° = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 \times 5 \times \cos 60° = \frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{CA} = 5 \times 5 \times \cos 120° = -\frac{25}{2}$

$\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{AC} = 5 \times 5 \times \cos 60° = \frac{25}{2}$



5. Opção (A)

Seja $\vec{r}(a, b, c)$ um vetor diretor da reta r. Tem-se que:

$$\begin{cases} (a,b,c) \cdot (-3,2,3) = 0 \\ (a,b,c) \cdot (3,-1,-2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3a + 2b + 3c = 0 \\ 3a - b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = 2b + 3c \\ 2b + 3c - b - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a = -2c + 3c \\ b = -c \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1}{3}c \\ b = -c \end{cases}$$

Assim, $\vec{r}\left(\frac{1}{3}c, -c, c\right), c \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Por exemplo, $\vec{r}(1, -3, 3)$ é um vetor diretor da reta r.

Assim, uma equação vetorial que define a reta r é $(x, y, z) = (1, -1, 2) + k(1, -3, 3), k \in \mathbb{R}$.

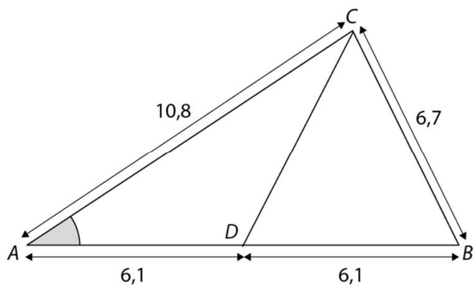
Grupo II

1. Pela Lei dos Cossenos:

$6{,}7^2 = 12{,}2^2 + 10{,}8^2 - 2 \times 12{,}2 \times 10{,}8 \cos \hat{A}$

$\Leftrightarrow 44{,}89 = 148{,}84 + 116{,}64 - 263{,}52 \cos \hat{A}$

$\Leftrightarrow \cos \hat{A} = \frac{220{,}59}{263{,}52}$



Por outro lado:

$\overline{CD}^2 = 10{,}8^2 + 6{,}1^2 - 2 \times 10{,}8 \times 6{,}1 \times \cos \hat{A}$

$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 116{,}64 + 37{,}21 - 131{,}76 \times \frac{220{,}59}{263{,}52}$

$\Leftrightarrow \overline{CD}^2 = 43{,}555$

Logo, $\overline{CD} = \sqrt{43{,}555} \approx 6{,}6$ u.a.

2.

2.1. $g(x) = 0 \Leftrightarrow -2\cos\ (2x) - 1 = 0$

$\Leftrightarrow \cos\ (2x) = -\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \ \vee \ 2x = -\frac{2\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi \ \vee \ x = -\frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{3}$ $(\in [0, \pi])$ ou $x = -\frac{\pi}{3}$ $(\notin [0, \pi])$.

Se $k = 1$, então $x = \frac{4\pi}{3}$ $(\notin [0, \pi])$ ou $x = \frac{2\pi}{3}$ $(\in [0, \pi])$.

Assim, os zeros de g são $\frac{\pi}{3}$ e $\frac{2\pi}{3}$.

2.2. $f(x) = g(x) \Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = -2\cos\ (2x) - 1$

$\Leftrightarrow 2\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -2\cos\ (2x)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \cos(\pi - 2x)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - (\pi - 2x)\right)$

$\Leftrightarrow \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(-\frac{\pi}{2} + 2x\right)$

$\Leftrightarrow x - \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{2} + 2x + 2k\pi \ \vee \ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \left(-\frac{\pi}{2} + 2x\right) + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow -x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{2} - 2x + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ 3x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ \vee \ x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z}$

Se $k = 0$, então $x = \frac{\pi}{4}$ ou $x = \frac{7\pi}{12}$, que são, respetivamente, as abcissas dos pontos P e Q.

2.3. $f\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}\right) - 1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\sin\alpha - 1 = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \sin\alpha = \frac{3}{4}$

Sabe-se que:

$\cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = 1 - \frac{9}{16} \Leftrightarrow \cos^2 \alpha = \frac{7}{16}$

Como $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right[$, então $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{7}}{4}$.

$g\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -2\cos\left(2 \times \frac{\alpha}{2}\right) - 1 = -2\cos\alpha - 1 = -2 \times \left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right) - 1 = \frac{\sqrt{7}}{2} - 1$

3.

3.1. $\overrightarrow{AB} = B - A = (4, 0) - (0, 2) = (4, -2)$

Assim, uma equação vetorial da reta AB é $(x, y) = (0, 2) + k(4, -2), k \in \mathbb{R}$.

3.2. Tem-se $m = \tan 30° = \frac{\sqrt{3}}{3}$ e o ponto $A(0, 2)$ pertence à reta AC .

Logo, AC: $y = \frac{\sqrt{3}}{3}x + 2$.

3.3. Um vetor diretor da reta AC é, por exemplo, $(3, \sqrt{3})$.

$\|(3, \sqrt{3})\| = \sqrt{3^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{9 + 3} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$

$\|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$(3, \sqrt{3}) \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 4 + \sqrt{3} \times (-2) = 12 - 2\sqrt{3}$

Seja α a amplitude do ângulo formado pelas retas AB e AC. Então:

$\cos \alpha = \frac{|12 - 2\sqrt{3}|}{2\sqrt{3} \times 2\sqrt{5}}$

Logo, $\alpha \approx 56{,}57°$.

4.

4.1. A é o ponto de interseção das retas OA e AB.

OA: $(x, y, z) = (9, 0, 12) + r(3, 0, 4), r \in \mathbb{R}$

Um ponto genérico da reta OA é do tipo $(9 + 3r, 0, 12 + 4r)$.

Substituindo na equação da reta AB:

$(9 + 3r, 0, 12 + 4r) = (5, 1, 8) + s(-1, 1, 0) \Leftrightarrow (9 + 3r, 0, 12 + 4r) = (5 - s, 1 + s, 8)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 + 3r = 5 - s \\ 1 + s = 0 \\ 12 + 4r = 8 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9 - 3 = 5 + 1 \\ s = -1 \\ r = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} s = -1 \\ r = -1 \end{cases}$$

Substituindo nas coordenadas do ponto genérico de OA, obtém-se (6, 0, 8), que são as coordenadas do ponto A.

4.2. Os vetores (3, 0, 4) e (–1, 1, 0) são vetores diretores do plano ABO e o ponto A pertence a este plano.

Logo, uma equação vetorial do plano é $(x, y, z) = (6, 0, 8) + r(3, 0, 4) + s(-1, 1, 0), r, s \in \mathbb{R}$.

4.3. Um plano perpendicular à reta AB é da forma $-x + y + d = 0$.

Como o ponto P(2, –4, 1) pertence ao plano, vem que:

$-2 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = 6$

Logo, a equação pedida é $-x + y + 6 = 0$.

4.4. $\overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0$ representa a superfície esférica de diâmetro [AB].

Sabemos que B pertence à reta AB.

Assim, as suas coordenadas são da forma $(5 - s, 1 + s, 8)$, para algum $s \in \mathbb{R}$.

Sabemos, também, que o ponto B pertence ao plano yOz.

Logo, $5 - s = 0$, ou seja, $s = 5$.

Assim, as coordenadas de B são (0, 6, 8).

Temos, então:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0 &\Leftrightarrow (x - 6, y, z - 8) \cdot (x, y - 6, z - 8) = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 - 6x + y^2 - 6y + (z - 8)^2 = 0 \\ &\Leftrightarrow (x - 3)^2 + (y - 3)^2 + (z - 8)^2 = 18 \end{aligned}$$