Novo Espaço – Matemática A 11.º ano

Proposta de Teste **[Outubro 2016]**

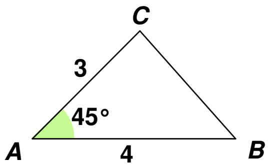
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

1.ª Parte

Para cada questão indica a opção que consideras correta.

1. Na figura está representado um triângulo [*ABC*].



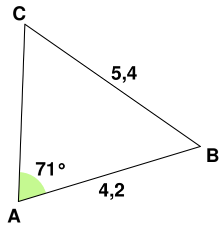
Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que:

- $\overline{AB} = 4$
- $\overline{AC} = 3$
- $B\hat{A}C = 45°$

A medida do comprimento do lado [*BC*] é igual a:

(A) $5-\sqrt{12\sqrt{2}}$ **(B)** $\sqrt{25-12\sqrt{2}}$ **(C)** 2,8 **(D)** $5-\sqrt{12\sqrt{3}}$

2. Na figura está representado um triângulo [*ABC*].



Fixada uma unidade de comprimento, sabe-se que:

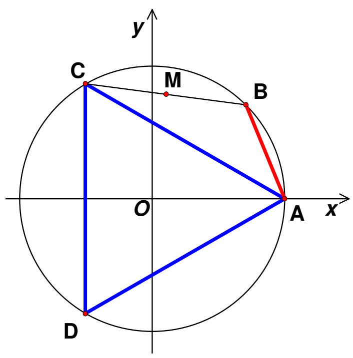
- $\overline{AB} = 4,2$
- $\overline{BC} = 5,4$
- $B\hat{A}C = 71°$

A medida da amplitude do ângulo *ACB*, em graus arredondada às décimas, é igual a:

(A) 44,4 **(B)** 55,3

(C) 48,2 **(D)** 47,3

3. Na figura em referencial o. n. *Oxy* está representada a circunferência trigonométrica.



Sabe-se que:

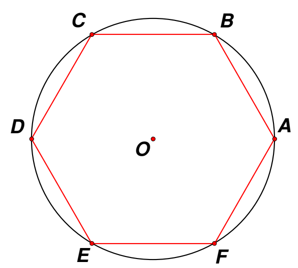
- o triângulo [*ACD*] é equilátero e está inscrito na circunferência;
- o ponto *A* tem coordenadas (1, 0);
- [*AB*] é o lado de um octógono regular inscrito na circunferência;
- *M* é o ponto médio de [*BC*].

A abcissa do ponto *M* é igual a:

(A) $\dfrac{\sqrt{2}-1}{4}$ **(B)** $\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$

(C) $\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$ **(D)** $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$

4. Na figura estão representados uma circunferência de centro *O* e um hexágono regular [*ABCDEF*] inscrito na circunferência.

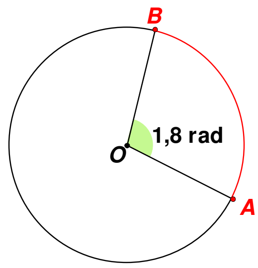


Ao ponto *A* foi aplicada uma rotação de centro *O* e ângulo generalizado (α, n) e a imagem obtida foi o ponto *E*.

Qual dos seguintes ângulos generalizados pode corresponder à referida rotação?

(A) $(240°, -3)$ **(B)** $(-120°, 4)$ **(C)** $(-120°, -2)$ **(D)** $(60°, 4)$

5. Na figura está representada uma circunferência de centro *O*.



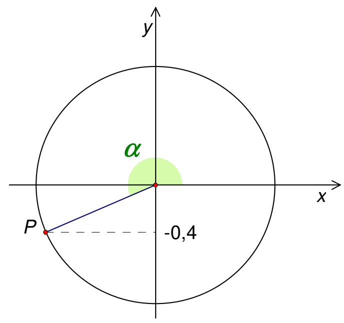
Sabe-se que:

- os pontos *A* e *B* pertencem à circunferência;
- a medida da amplitude, em radianos, do ângulo ao centro *AOB* é 1,8;
- a medida do comprimento do arco *AB* é 9.

Então, podes concluir que o perímetro do círculo limitado pela circunferência é igual a:

(A) 10π **(B)** 18π **(C)** 5π **(D)** 9π

6. Na figura estão representados o círculo trigonométrico e um ângulo α.



O ponto *P* é a interseção do lado extremidade do ângulo α com a circunferência trigonométrica.

Sabe-se que a ordenada de *P* é $-0{,}4$.

Então, o valor de $\cos(\alpha - \pi)$ é igual a:

(A) $\frac{\sqrt{21}}{5}$ **(B)** $\frac{2}{5}$ **(C)** $-\frac{\sqrt{21}}{5}$ **(D)** $-\frac{3}{5}$

7. Sabe-se que $\sin(\pi + \alpha) = \frac{1}{3}$ e $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

$\cos(-\alpha)$ é igual a:

(A) $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ **(B)** $-\frac{1}{3}$ **(C)** $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ **(D)** $-\frac{\sqrt{8}}{3}$

8. Em relação a um ângulo α sabe-se que $\tan\alpha = k$ e $\sin(\pi - \alpha) = a$, com $k, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Então, podes concluir que $\cos\alpha$ é igual a:

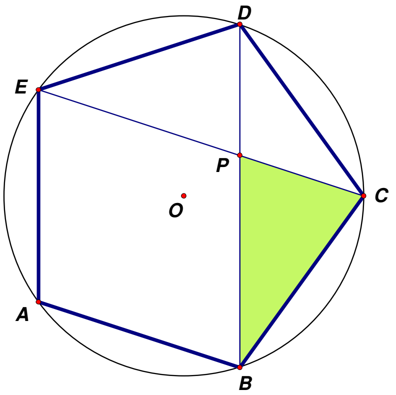
(A) ka **(B)** $\frac{a}{k}$ **(C)** $-ak$ **(D)** $\frac{k}{a}$

2.ª Parte

Dá respostas completas apresentando todos os cálculos e justificações necessárias.

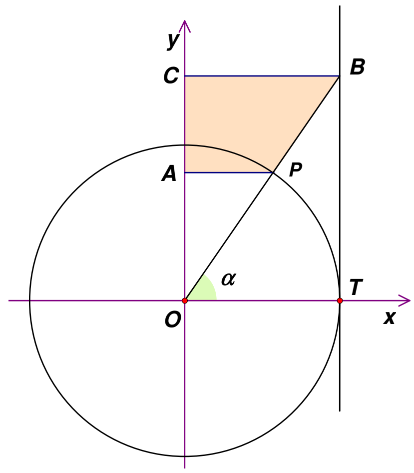
1. Na figura está representado um pentágono regular [*ABCDE*] inscrito na circunferência de centro *O*.
O pentágono tem de perímetro 20 m e *P* é o ponto de interseção das diagonais [*BD*] e [*CE*].
Determina o perímetro do triângulo [*BCP*], em metros, arredondado às décimas.
Na resolução deve ficar explicito a determinação:

- da amplitude, em graus, do ângulo *BPC*;
- das medidas dos lados [*BP*] e [*PC*], em metros (valores exatos ou arredondadas às milésimas);
- do perímetro do triângulo [*BCP*].



2. Na figura estão representados o círculo trigonométrico e um trapézio retângulo [*APBC*].
Sabe-se que:

- *T* tem de coordenadas (1, 0);
- a reta *TB* é definida pela equação $x=1$;
- *P* é o ponto de interseção da reta *OB* com a circunferência trigonométrica;
- a amplitude, em radianos, do ângulo *TOB* é designada por α, com $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$;
- os pontos *A* e *C* são, respetivamente, as projeções ortogonais de *P* e *B* sobre *Oy*.



2.1. Determina o valor exato de $\overline{AC}$ se $\sin\alpha = \frac{4}{5}$.

2.2. Seja $A(\alpha)$ a área do trapézio [*APBC*] em função de α.

Mostra que: $A(\alpha) = \frac{\tan\alpha - \sin\alpha\cos\alpha}{2}$

2.3. Recorrendo ao resultado obtido em **2.2.**, mostra que, se $\alpha = \frac{\pi}{6}$, então a área do trapézio é igual $\frac{\sqrt{3}}{24}$.

3. Determina os valores exatos de:

3.1. $\sin\frac{11\pi}{3} - 2\cos\frac{7\pi}{6} + \tan\frac{11\pi}{4}$

3.2. $\cos\left(-\frac{39\pi}{6}\right) + \sin\left(\frac{17\pi}{2}\right) - 2\tan\left(-\frac{45\pi}{4}\right)$

4. Dado um ângulo α, sabe-se que $\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{3}$ e $\alpha \in [0, \pi]$. Determina $\tan(\alpha - \pi)$.

FIM

	Cotações														
	1.ª Parte								2.ª Parte						
Questões	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**1.**	**2.1.**	**2.2.**	**2.3.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**
Cotações	5	5	5	5	5	5	5	5	25	22	25	20	22	22	24

1.ª Parte

1. Aplicando o Teorema de Carnot (Lei dos cossenos) tem-se:

$$\overline{BC}^2 = \overline{AC}^2 + \overline{AB}^2 - 2\times\overline{AB}\times\overline{AC}\times\cos B\hat{A}C$$

$$\overline{BC}^2 = 3^2+4^2-2\times4\times3\times\cos 45° \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 9+16-24\times\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 25-12\sqrt{2}$$

Então, $\overline{BC} = \sqrt{25-12\sqrt{2}}$.

Opção (B)

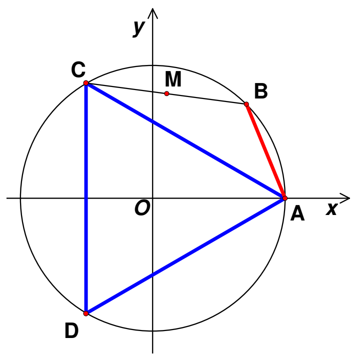
2. Aplicando a lei dos senos tem-se:

$$\frac{\sin 71°}{5,4} = \frac{\sin A\hat{C}B}{4,2} \Leftrightarrow \sin A\hat{C}B = \frac{4,2\times\sin 71°}{5,4} \Leftrightarrow \sin A\hat{C}B \approx 0,7354$$

Então, $A\hat{C}B \approx 47,3$.

Opção (D)

3. Atendendo a que A tem coordenadas (1, 0) e o triângulo [ACD] é equilátero, conclui-se que $A\hat{O}C = 120°$. Então, as coordenadas de C são $(\cos 120°, \sin 120°)$.



$$\cos 120° = -\cos 60° = -\frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \sin 120° = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad C\left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

Como [AB] é o lado de um octógono regular inscrito na circunferência, $A\hat{O}B = \frac{360°}{8} = 45°$.

Como $\cos 45° = \sin 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$, tem-se $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

A abcissa do ponto M é $\dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}}{2}$, ou seja, $\frac{\sqrt{2}-1}{4}$.

Opção (A)

4. A resposta terá que ser do tipo $(-120°, k)$ com $k \in \mathbb{Z}_0^-$ ou $(240°, k)$ com $k \in \mathbb{Z}_0^+$.

Opção (C)

5. Sabe-se que a amplitude do arco e o seu comprimento são proporcionais.

$$\frac{9}{1{,}8} = \frac{P}{2\pi} \Leftrightarrow P = \frac{18\pi}{1{,}8} \Leftrightarrow P = 10\pi$$

Opção (A)

6. Sabe-se que $\sin\alpha = -0{,}4$.

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow 0{,}16 + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = 0{,}84 \Leftrightarrow$$

$$\cos\alpha = \sqrt{\frac{84}{100}} \vee \cos\alpha = -\sqrt{\frac{84}{100}} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{21}}{10} \vee \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{21}}{10} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5} \vee \cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$$

Como $\alpha \in 3.^\circ$ Q., então $\cos\alpha < 0$. Então, $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{21}}{5}$.

Assim, tem-se:

$$\cos(\alpha - \pi) = -\cos\alpha = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

Opção (A)

7. $\sin(\pi + \alpha) = \frac{1}{3} \Leftrightarrow -\sin\alpha = \frac{1}{3} \Leftrightarrow \sin\alpha = -\frac{1}{3}$

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{9} + \cos^2\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{8}{9} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3} \vee \cos\alpha = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Como $\alpha \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ tem-se $\cos\alpha > 0$. Assim, $\cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.

$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

Opção (C)

8. Sabe-se que $\sin(\pi - \alpha) = a \Leftrightarrow \sin\alpha = a$ e que $k, a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Por outro lado, $\tan\alpha = k \Leftrightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = k \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{\sin\alpha}{k} \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{a}{k}$.

Opção (B)

2.ª Parte

1. $\overset{\frown}{CD} = \frac{360°}{5} = 72°$. Então, $C\hat{B}D = \frac{72°}{2} = 36°$

$\overset{\frown}{EB} = 2 \times 72° = 144°$. Então, $E\hat{C}D = \frac{144°}{2} = 72°$

$B\hat{P}C = 180° - (36° + 72°) = 72°$

O triângulo $[BCP]$ é isósceles, $\overline{BC} = \overline{PB}$.

O perímetro do pentágono é 20 m. Então, cada lado do pentágono mede 4 m.

Assim, tem-se:

$\overline{BC} = \overline{PB} = 4\,\text{m}$

Aplicando a lei dos senos, tem-se: $\frac{\sin 72°}{4} = \frac{\sin 36°}{\overline{PC}}$

Daqui resulta: $\overline{PC} = \frac{4 \sin 36°}{\sin 72°}$

Perímetro do triângulo $[BCP]$: $\overline{BC} + \overline{CP} + \overline{PB} = 4 + \frac{4 \sin 36°}{\sin 72°} + 4 = 8 + \frac{4 \sin 36°}{\sin 72°}$

Recorrendo à calculadora obtém-se: $\overline{BC} + \overline{CP} + \overline{PB} \approx 10{,}5\,\text{m}$

2.

2.1. $\overline{AC} = \overline{OC} - \overline{OA} = \tan\alpha - \sin\alpha = \tan\alpha - \frac{4}{5}$ **(1)**

Sabe-se que $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Como $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, tem-se: $\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25} \Leftrightarrow \cos^2\alpha = \frac{9}{25}$.

O ângulo α é do 1.º quadrante, então $\cos\alpha = \frac{3}{5}$.

Sabe-se que $\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, então $\tan\alpha = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{4}{3}$.

Substituindo em **(1)**, tem-se: $\overline{AC} = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15}$

2.2.

$$A(\alpha)=\frac{\overline{BC}+\overline{AP}}{2}\times\overline{AC}=\frac{1+\cos\alpha}{2}\times(\tan\alpha-\sin\alpha)$$

$$A(\alpha)=\frac{\tan\alpha+\cos\alpha\times\tan\alpha-\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{\tan\alpha+\sin\alpha-\sin\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

$$A(\alpha)=\frac{\tan\alpha-\sin\alpha\cos\alpha}{2}$$

2.3. $A\left(\frac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{6}}{2}=\dfrac{\frac{\sqrt{3}}{3}-\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}=\dfrac{\frac{4\sqrt{3}-3\sqrt{3}}{12}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{24}$

3.

3.1. $\sin\frac{11\pi}{3}-2\cos\frac{7\pi}{6}+\tan\frac{11\pi}{4}$

$$\sin\frac{11\pi}{3}-2\cos\frac{7\pi}{6}+\tan\frac{11\pi}{4}=\sin\left(\frac{12\pi}{3}-\frac{\pi}{3}\right)-2\cos\left(\pi+\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(\frac{12\pi}{4}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$=\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+2\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)+\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{2\sqrt{3}}{2}-1=\frac{\sqrt{3}}{2}-1$$

3.2. $\cos\left(-\frac{39\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{17\pi}{2}\right)-2\tan\left(-\frac{45\pi}{4}\right)=\cos\left(\frac{39\pi}{6}\right)+\sin\left(8\pi+\frac{\pi}{2}\right)+2\tan\left(11\pi+\frac{\pi}{4}\right)$

$$=\cos\left(6\pi+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+2\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)=0+1+2\times1=3$$

4. Sabe-se que $\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}$ e $\alpha\in[0,\pi]$.

$\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{3}\Leftrightarrow-\cos\alpha=\frac{2}{3}\Leftrightarrow\cos\alpha=-\frac{2}{3}$. Como $\alpha\in[0,\pi]$, conclui-se que α é um ângulo do 2.º quadrante.

$\tan(\alpha-\pi)=\tan\alpha$

Sabe-se que $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$; $\sin^2\alpha+\frac{4}{9}=1\Leftrightarrow\sin^2\alpha=\frac{5}{9}$

Como α pertence ao 2.º quadrante o seno é positivo. Então, tem-se: $\sin\alpha=\frac{\sqrt{5}}{3}$.

Assim, tem-se $\tan(\alpha-\pi)=\tan\alpha=\dfrac{\frac{\sqrt{5}}{3}}{-\frac{2}{3}}=-\dfrac{\sqrt{5}}{2}$.

FIM