## Proposta de teste de avaliação [fevereiro – 2020]


**Nome:** ______________________________________________

**Ano / Turma:** _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

**1.** Qual é o limite da sucessão de termo geral $\left(3-\dfrac{2n+1}{n+2}\right)^n$ ?

**(A)** $\dfrac{1}{e^3}$ **(B)** $1$ **(C)** $e^3$ **(D)** $e^2$

**2.** Para um certo número real $k$, considera a função *f*, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\log_3(x+1) & \text{se } x\geq 0\\ 2^k & \text{se } x<0\end{cases}$$

Sabe-se que os pontos *A* e *B* pertencem ao gráfico de $f$ e que têm a mesma ordenada e abcissas 26 e $-\sqrt{3}$, respetivamente.

Qual é o valor de *k*?

**(A)** $\log_2 3$ **(B)** $0$ **(C)** $\log_3 2$ **(D)** $3$

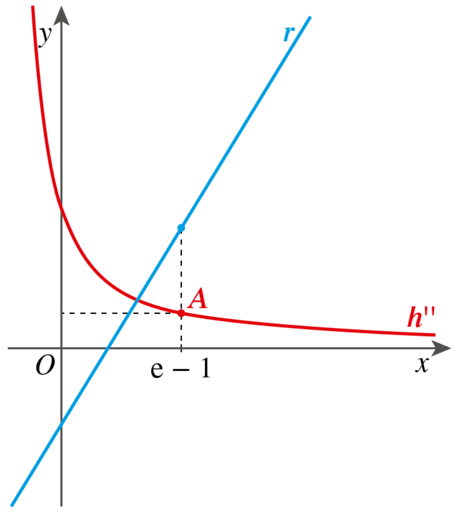
**3.** Seja $f$ a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{e^{x-1}-1} & \text{se } x>1\\ 2 & \text{se } x=1\\ \dfrac{-2x+2}{x^2-3x+2} & \text{se } x<1\end{cases}$$

Estuda a função *f* quanto à continuidade em $x=1$ e à existência de assíntotas ao seu gráfico paralelas aos eixos coordenados.

**4.** Considera a função *h*, de domínio $\left]-1,+\infty\right[$, definida por $h(x)=x\ln(x+1)$.

Na figura estão representados o gráfico de $h''$ (segunda derivada de $h$) e uma reta *r*.




Sabe-se que:

**.** a reta *r* é tangente ao gráfico da função *h* no ponto de abcissa $e-1$;

**.** o ponto *A* pertence ao gráfico da função $h''$ e tem abcissa $e-1$.

**4.1.** O declive da reta *r* é igual a:

**(A)** $\frac{1}{e}$ **(B)** $\frac{e-1}{e}$ **(C)** $\frac{e}{e+1}$ **(D)** $2-\frac{1}{e}$

**4.2.** Determina a ordenada do ponto *A*.

**5.** Considera a função *f*, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

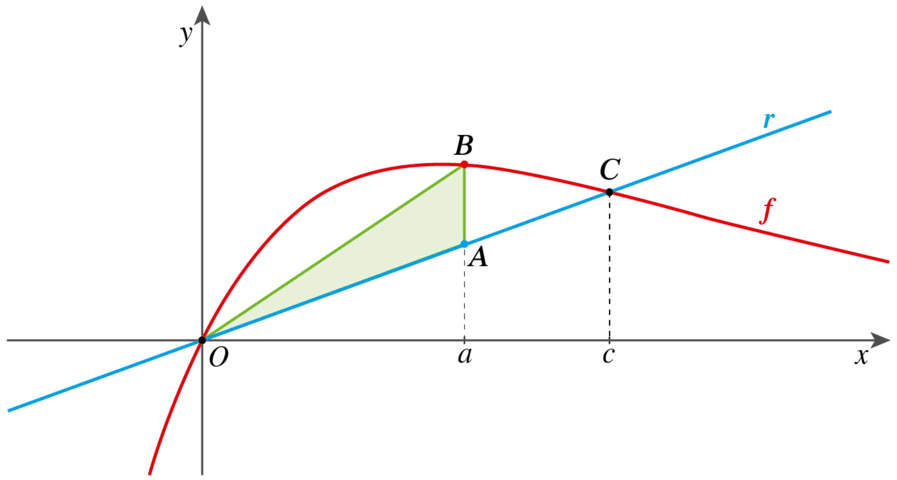
$$f(x)=\sqrt{x}\times\ln x$$

Estuda a função *f*, por processos exclusivamente analíticos, quanto à monotonia e à existência de extremos.

**6.** Na figura estão representadas parte do gráfico de uma função *f* definida por:

$$f(x) = 2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$$

e uma reta *r* definida pela equação $y = \dfrac{x}{\mathrm{e}}$.




Sabe-se que:

. $C$ é o ponto de interseção da reta $r$ com o gráfico de $f$, de abcissa $c$, com $c > 0$;

. os pontos $A$ e $B$ são pontos móveis, com a mesma abcissa $a$, com $0 < a < c$, em que $A$ pertence à reta $r$ e $B$ pertence ao gráfico de $f$.

A cada posição dos pontos $A$ e $B$ corresponde um triângulo $[OAB]$.

**6.1.** Por um processo exclusivamente analítico, determina $c$ (abcissa do ponto $C$).

**6.2.** Há dois valores de $a$ para os quais a medida da área do triângulo $[OAB]$ é igual a 0,25.

Determina, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, os valores de $a$.

Na tua resposta:

. apresenta uma equação que te permita resolver o problema;

. reproduz num referencial o.n. $Oxy$ o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que te permite(em) resolver a equação;

. apresenta as soluções arredondadas às centésimas.

## FIM

| Cotações | | | | | | | | | Total |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| **Questões** | **1.** | **2.** | **3.** | **4.1.** | **4.2.** | **5.** | **6.1.** | **6.2.** | |
| **Pontos** | 15 | 15 | 35 | 15 | 30 | 30 | 30 | 30 | **200** |

# FORMULÁRIO

## GEOMETRIA

**Comprimento de um arco de circunferência:** $\alpha r$
($\alpha$: amplitude, em radianos, do ângulo ao centro;
$r$: raio)

**Área de um polígono regular:** Semiperímetro $\times$ Apótema

**Área de um setor circular:** $\frac{\alpha r^2}{2}$

($\alpha$: amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; $r$: raio)

**Área lateral de um cone:** $\pi r g$

($r$: raio da base; $g$: geratriz)

**Área de uma superfície esférica:** $4\pi r^2$

($r$: *raio*)

**Volume de uma pirâmide:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de um cone:** $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

**Volume de uma esfera:** $\frac{4}{3}\pi r^3$ ($r$: raio)

## PROGRESSÕES

Soma dos $n$ primeiros termos de uma progressão $(u_n)$:

**Progressão aritmética:** $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

**Progressão geométrica:** $u_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$

## TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$

## COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

## PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1(x_1-\mu)^2 + \ldots + p_n(x_n-\mu)^2}$

Se $X$ é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

## REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

## LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

**1.** $$\lim\left(3-\frac{2n+1}{n+2}\right)^n=\lim\left(\frac{3n+6-2n-1}{n+2}\right)^n=\lim\left(\frac{n+5}{n+2}\right)^n=$$

$$=\lim\left(\frac{1+\frac{5}{n}}{1+\frac{2}{n}}\right)^n=\frac{\lim\left(1+\frac{5}{n}\right)^n}{\lim\left(1+\frac{2}{n}\right)^n}=\frac{e^5}{e^2}=e^3$$

**Resposta:** Opção **(C)** $e^3$

**2.** Sabe-se que $f(26)=f\left(-\sqrt{3}\right)$.

$$\log_3(26+1)=2^k \Leftrightarrow \log_3 27=2^k \Leftrightarrow 2^k=3 \Leftrightarrow k=\log_2 3$$

**Resposta:** Opção **(A)** $\log_2 3$

**3.** $$\lim_{x\to1^+}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^+}\frac{(x-1)(x+1)}{e^{x-1}-1}=\lim_{x\to1^+}\frac{x+1}{\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}=\frac{\lim\limits_{x\to1^+}(x+1)}{\lim\limits_{x\to1^+}\frac{e^{x-1}-1}{x-1}}=\frac{2}{\lim\limits_{y\to0}\frac{e^y-1}{y}}=\frac{2}{1}=2$$

Fazendo $x-1=y$, se $x\to1$, então $y\to0$.

$$\lim_{x\to1^-}\frac{-2x+2}{x^2-3x+2}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim_{x\to1^-}\frac{-2(x-1)}{(x-1)(x-2)}=\lim_{x\to1^-}\frac{-2}{x-2}=2$$

$$f(1)=2$$

Como $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to1^1}f(x)=f(1)$, conclui-se que $f$ é contínua em $x=1$.

As assíntotas verticais não existem, dado que a função é contínua no domínio (em $\mathbb{R}$).

Assíntotas horizontais:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-1}{e^{x-1}-1}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{e}\times\frac{e^x}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\frac{1}{+\infty}=0\,.$$

A reta $y=0$ é assíntota horizontal quando $x\to+\infty$.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{-2x+2}{x^2-3x+2}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{=}\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{-2}{x}+\frac{2}{x^2}}{1-\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}=\frac{0}{1}=0$$

A reta $y=0$ é assíntota horizontal quando $x\to-\infty$

**Resposta:** A função é contínua em $x=1$ e a reta $y=0$ é assíntota horizontal.

**4.1.** $h(x)=x\ln(x+1)$

$$h'(x)=\left(x\ln(x+1)\right)'=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

$$h'(\mathrm{e}-1)=\ln(\mathrm{e}-1+1)+\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}-1+1}=1+\frac{\mathrm{e}-1}{\mathrm{e}}=2-\frac{1}{\mathrm{e}}$$

**Resposta:** Opção **(D)** $2-\frac{1}{\mathrm{e}}$

**4.2.** $h(x)=x\ln(x+1)$

$$h'(x)=\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}$$

$$h''(x)=\left(\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}\right)'=\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}$$

$$h''(\mathrm{e}-1)=\frac{\mathrm{e}-1+2}{(\mathrm{e}-1+1)^2}=\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}^2}$$

**Resposta:** A ordenada do ponto *A* é $\frac{\mathrm{e}+1}{\mathrm{e}^2}$.

**5.** $f(x)=\sqrt{x}\ln(x)$

$$f'(x)=\left(\sqrt{x}\ln(x)\right)'=\frac{\ln x}{2\sqrt{x}}+\frac{\sqrt{x}}{x}=\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}$$

$$f'(x)=0\Leftrightarrow\frac{\ln x+2}{2\sqrt{x}}=0\Leftrightarrow\ln x=-2\Leftrightarrow x=\mathrm{e}^{-2}$$

| $x$ | $0$ | | $\mathrm{e}^{-2}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| | | $\searrow$ | $f(\mathrm{e}^{-2})$ | $\nearrow$ |

$$f\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=\sqrt{\mathrm{e}^{-2}}\times\ln\left(\mathrm{e}^{-2}\right)=\frac{1}{\mathrm{e}}\times(-2)=-\frac{2}{\mathrm{e}}$$

$-\frac{2}{\mathrm{e}}$ é mínimo absoluto de $f$.

Se $x\in\left]0,\ \mathrm{e}^{-2}\right]$, a função é decrescente.

Se $x\in\left[\mathrm{e}^{-2},+\infty\right[$, a função é crescente.

**6.**

**6.1.** $f(x)=\frac{x}{\mathrm{e}}\Leftrightarrow 2x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{x}{\mathrm{e}}\Leftrightarrow x\left(2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)=0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{\mathrm{e}}\Leftrightarrow x=0\ \vee\ \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}=\frac{1}{2\mathrm{e}}\Leftrightarrow x=0\ \vee\ -\frac{x}{2}=\ln\left(\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=2\ln(2\mathrm{e})\Leftrightarrow x=0\ \vee\ x=\ln\left(4\mathrm{e}^{2}\right)=2+\ln 4$

Como $c>0$, $c=2+\ln 4$.

**Resposta:** $c=2+\ln 4$

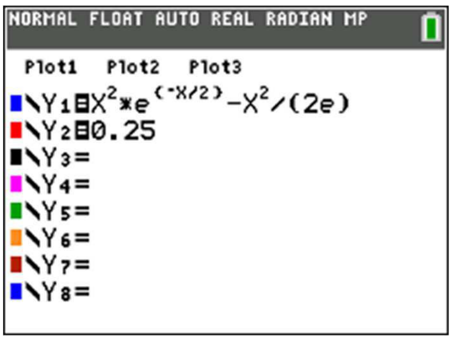
**6.2.** Seja $A$ a área do triângulo definida em função de $a$.

$$A(a)=\left(f(a)-\frac{a}{\mathrm{e}}\right)\times\frac{a}{2}\Leftrightarrow A(a)=\left(2a\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}-\frac{a}{\mathrm{e}}\right)\times\frac{a}{2}\Leftrightarrow A(a)=a^{2}\mathrm{e}^{-\frac{a}{2}}-\frac{a^{2}}{2\mathrm{e}}$$

Pretende-se resolver a equação:

$$A(a)=0{,}25\Leftrightarrow a^{2}e^{-\frac{a}{2}}-\frac{a^{2}}{2e}=0{,}25$$

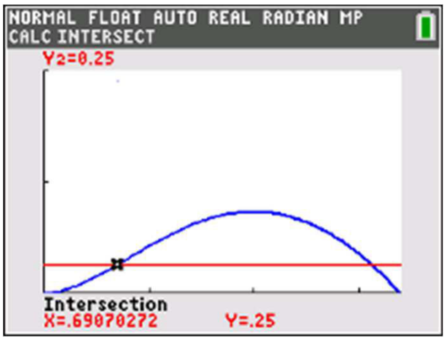
Inserem-se na calculadora as expressões $A(a)$ e 0,25 e determinam-se os pontos de interseção das representações gráficas obtidas.

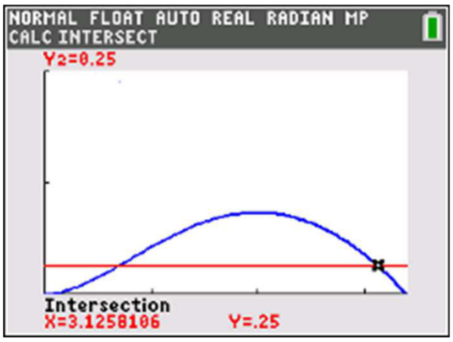


Utilizando uma janela adequada, por exemplo:

Xmin = 0 Xmax = 3,4 Ymin = 0 Ymax = 2

obtém-se:




Conclui-se que $a \approx 0,69 \quad \vee \quad a \approx 3,13$ .