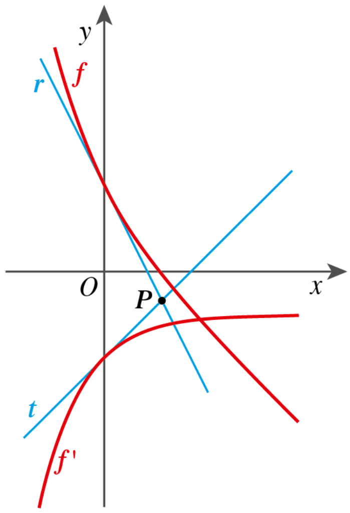
Proposta de teste de avaliação [março – 2020]

Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ___ - ____ - ___

- Não é permitido o uso de corretor. Deves riscar aquilo que pretendes que não seja classificado.
- A prova inclui um formulário.
- As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado da prova.

1. Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, as funções f e f' (função derivada de f), sendo f definida por $f(x) = e^{-x} - x + 1$.



Sabe-se que:

- a reta r é tangente ao gráfico de f no ponto em que este interseta Oy;
- a reta t é tangente ao gráfico de f' no ponto em que este interseta Oy;
- o ponto de interseção das retas r e t é designado por P.

1.1. Determina $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f'(x) + 2}{x}$.

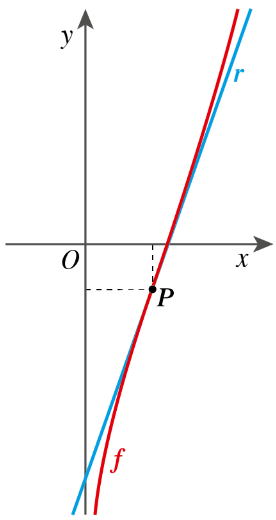
1.2. Resolve a equação $f'(x) = f''(x) - e^{x}$.

1.3. Determina as coordenadas do ponto P.

2. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = x^2 - \ln\left(\frac{2}{x}\right)$$

Na figura estão representadas, num referencial o.n. Oxy, a função f e a reta r tangente ao gráfico de f no ponto P com declive mínimo.



2.1. Mostra que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \; f'(x) = \dfrac{2x^2 + 1}{x}$.

2.2. Determina a abcissa do ponto P.

3. Seja k um número real positivo e f a função, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por:

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right) - x$$

3.1. Podes concluir que $f(1)$ é igual a:

(A) $-1+\ln k$ **(B)** 0 **(C)** $\ln\left(\frac{1+k}{\mathrm{e}}\right)$ **(D)** -1

3.2. Mostra que a reta de equação $y=-x+k$ é assíntota oblíqua ao gráfico de f.

4. Dois alunos do 12.º ano, a Sofia e o Bernardo, influenciados pelas notícias diárias sobre o novo coronavírus, pesquisaram dados relativos à evolução do número total de contágios validados.

<table>
<tr><td colspan="2">De 7 a 23 de fevereiro de 2020, em dias distintos, a Sofia e o Bernardo fizeram a recolha de dados e, com recurso às capacidades gráficas da calculadora, obtiveram dois modelos matemáticos.</td></tr>
<tr><td>Modelo da Sofia</td><td>Modelo do Bernardo</td></tr>
<tr><td>$\boldsymbol{S(t)=\dfrac{88\,960}{1+1{,}84\mathrm{e}^{-0{,}24t}}}$
$S(t)$ representa o número de contágios validados t dias após 7 de fevereiro.</td><td>$\boldsymbol{B(t)=36\,257\,\mathrm{e}^{0{,}075t}}$
$B(t)$ representa o número de contágios validados t dias após 7 de fevereiro.</td></tr>
</table>

4.1. Calcula $B(4)$.

Apresenta o resultado arredondado às unidades e interpreta-o, no contexto apresentado.

4.2. No final do dia 14 de fevereiro, o número de contágios validados era 67 100.

Qual dos modelos apresenta um resultado mais próximo do resultado real?

Justifica, de forma clara, a tua resposta.

5. Seja f a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin(2x)}{x} & \text{se } x>0\\ x\cos(2x) & \text{se } x\leq 0\end{cases}$$

5.1. $f(\alpha)\times f(-\alpha)$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$, é necessariamente igual a:

(A) $\dfrac{\sin(2\alpha)}{2}$ **(B)** $\cos(4\alpha)$ **(C)** $-\dfrac{\cos(2\alpha)}{2}$ **(D)** $-\dfrac{\sin(4\alpha)}{2}$

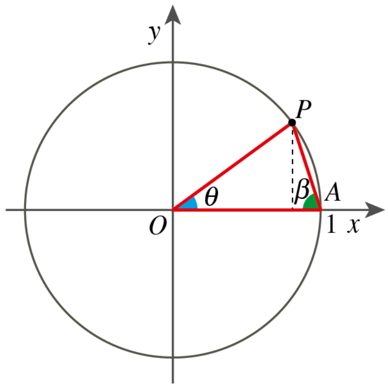
5.2. Mostra que a função f é descontínua em $x=0$.

5.3. Seja A um ponto do gráfico de f cuja abcissa pertence ao intervalo $[-\pi, 0[$ e é zero da função. Determina as coordenadas do ponto A.

6. Na figura está representada, num referencial o.n. Oxy, uma circunferência de centro O e raio 1.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas (1, 0);
- o ponto P pertence à circunferência;
- θ é a amplitude, em radianos, do ângulo AOP, com $\theta\in\left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$;
- β é a amplitude, em radianos, do ângulo PAO.



Recorre às capacidades gráficas da calculadora para determinar um valor arredondado às centésimas da abcissa do ponto P, no caso em que $\beta=2\theta$.

Tem em atenção que $\tan\beta=\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$.

Na resposta deves incluir:

- a equação que permite determinar o valor de θ;
- a reprodução, num referencial, da resolução gráfica da equação, apresentando o valor de θ com quatro casas decimais;
- a abcissa de P arredondada às centésimas.

FIM

Cotações														Total
Questões	**1.1.**	**1.2.**	**1.3.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.1.**	**5.2.**	**5.3.**	**6.**	
Pontos	13	15	20	15	20	13	15	13	13	13	15	15	20	**200**

FORMULÁRIO

GEOMETRIA

Comprimento de um arco de circunferência: αr
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro $\times$ Apótema

Área de um setor circular: $\frac{\alpha r^2}{2}$
(α : amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r : raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$
(r : raio da base; g : geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4\pi r^2$
(r : raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base $\times$ Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3}\pi r^3$ (r : raio)

PROGRESSÕES

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n):

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

TRIGONOMETRIA

$\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$

$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$

COMPLEXOS

$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis}(n\theta)$ ou $(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis}\left(\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)$ ou $\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta + 2k\pi}{n}}$

$(k \in \{0, \ldots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N})$

PROBABILIDADES

$\mu = p_1 x_1 + \ldots + p_n x_n$

$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \ldots + p_n (x_n - \mu)^2}$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0{,}6827$

$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}9545$

$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0{,}9973$

REGRAS DE DERIVAÇÃO

$(u+v)' = u' + v'$

$(u\,v)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'\,v - u\,v'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}\,u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\sin u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \sin u$

$(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'\,e^u$

$(a^u)' = u'\,a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

LIMITES NOTÁVEIS

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

1.

1.1. $f'(x)=\left(e^{-x}-x+1\right)'=-e^{-x}-1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f'(x)+2}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-e^{-x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\left(e^{-x}-1\right)}{x}.$$

Se $-x=y$, tem-se:

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^{-x}-1}{-x}=\lim_{y\to 0}\frac{e^{y}-1}{y}=1$$

Resposta: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)+2}{x}=1$

1.2. $f'(x)=f''(x)-e^{x}$

$f'(x)=-e^{-x}-1$

$f''(x)=\left(-e^{-x}-1\right)'=e^{-x}$

$f'(x)=f''(x)-e^{x}\Leftrightarrow -e^{-x}-1=e^{-x}-e^{x}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x}-1-2e^{-x}=0\Leftrightarrow e^{2x}-e^{x}-2=0\Leftrightarrow e^{x}=\dfrac{1\pm\sqrt{1+8}}{2}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow e^{x}=2\vee e^{x}=-1\Leftrightarrow e^{x}=2\Leftrightarrow x=\ln 2$

Resposta: $\text{C.S.}=\{\ln 2\}$

1.3. Ponto de interseção do gráfico de *f* com *Oy*: $A\left(0,f(0)\right)$

$A(0,2)$

Declive da reta *r*: $f'(0)=-2$

Equação reduzida da reta *r*: $y=-2x+2$

Ponto de interseção do gráfico de f' com *Oy*: $B\left(0,f'(0)\right)$

$B(0,-2)$

Declive da reta *t*: $f''(0)=1$

Equação reduzida da reta *t*: $y=x-2$

Interseção das retas r e t:

$$\begin{cases} y=-2x+2 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2=-2x+2 \\ y=x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{4}{3} \\ y=-\dfrac{2}{3} \end{cases}$$

Resposta: As coordenadas do ponto P são $\left(\dfrac{4}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$.

2.

2.1. $f(x)=x^2-\ln\left(\dfrac{2}{x}\right)=x^2-\ln 2+\ln x$

$f'(x)=\left(x^2-\ln 2+\ln x\right)'$

$f'(x)=2x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{2x^2+1}{x}$

2.2. O declive da reta tangente é mínimo quando a derivada tem um mínimo.

$f''(x)=\left(\dfrac{2x^2+1}{x}\right)'$

$f''(x)=\dfrac{4x^2-\left(2x^2+1\right)}{x^2}=\dfrac{2x^2-1}{x^2}$

$f''(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{2x^2-1}{x^2}=0$

$\dfrac{2x^2-1}{x^2}=0 \wedge x>0 \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \ \wedge \ x>0 \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2} \ \wedge \ x>0$

x	$-\infty$	$-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$		0		$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$+\infty$
$f''(x)$					$-$	0	$+$
$f'(x)$					$\searrow$		$\nearrow$

A primeira derivada atinge o mínimo quando $x=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Resposta: A abcissa do ponto P é $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

3.

3.1. $f(x) = x\ln\left(1+\dfrac{k}{x}\right) - x$

$$f(1) = \ln\left(1+\frac{k}{1}\right) - 1 = \ln(1+k) - 1 = \ln(1+k) - \ln(\mathrm{e}) = \ln\left(\frac{1+k}{\mathrm{e}}\right)$$

Resposta: (C) $\ln\left(\dfrac{1+k}{\mathrm{e}}\right)$

3.2. $y = -x + k$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(f(x) - (-x+k)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right) - x - (-x+k)\right) = \lim_{x\to+\infty}\left(x\ln\left(1+\frac{k}{x}\right) - k\right) =$$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left(\ln\left(1+\frac{k}{x}\right)^x - k\right) = -k + \ln\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{k}{x}\right)^x = -k + \ln\left(e^k\right) = -k + k = 0$$

Como $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x) - (-x+k)\right) = 0$, conclui-se que a reta $y = -x + k$ é assíntota ao gráfico de *f*.

4.

4.1. $B(t) = 36\ 257\,\mathrm{e}^{0,075t}$

$t = 0$ corresponde ao dia 7 de fevereiro e $t = 4$ ao dia 11 de fevereiro.

$B(4) = 36\,257 \times \mathrm{e}^{0,075\times 4}$

$B(4) \approx 48\ 942$ que corresponde ao valor dado pelo modelo para o número de pessoas contagiadas e confirmadas até ao final do dia 11 de fevereiro.

4.2. Valor real no final do dia 14: 67 100

Valor dado pelo modelo da Sofia: $S(7) = \dfrac{88\ 960}{1+1,84\mathrm{e}^{-0,24\times 7}} \approx 66\ 243$

Valor dado pelo modelo do Bernardo: $B(7) = 36\ 257 \times \mathrm{e}^{0,075\times 7} \approx 61\ 291$

O valor encontrado a partir do modelo da Sofia é mais próximo do real do que o valor dado pelo modelo do Bernardo.

5.

5.1. Se $\alpha \in \mathbb{R}^+$, então $-\alpha \in \mathbb{R}^-$.

$$f(\alpha) \times f(-\alpha) = \frac{\sin(2\alpha)}{\alpha} \times (-\alpha \cos(2\alpha)) = -\sin(2\alpha)\cos(2\alpha) =$$

$$= -\frac{1}{2}(2\sin(2\alpha)\cos(2\alpha)) = -\frac{1}{2}\sin(4\alpha)$$

Resposta: (D) $-\dfrac{\sin(4\alpha)}{2}$

5.2. $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{x} = 2 \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{\sin(2x)}{2x}$

Se $2x = y$, tem-se:

$$2 \lim_{x \to 0^+} \frac{\sin(2x)}{2x} = 2 \lim_{y \to 0^+} \frac{\sin y}{y} = 2 \times 1 = 2$$

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} x\cos(2x) = 0$$

Não existe limite em $x = 0$ e, dado que $0 \in D_f$, então *f* não é contínua em $x = 0$.

5.3. Seja x a abcissa do ponto *A*.

$$f(x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow x\cos(2x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 0[$$

$$\cos(2x) = 0 \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \ \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{\pi + 2k\pi}{4},\ k \in \mathbb{Z} \ \wedge x \in [-\pi, 0[\Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4}$$

O ponto *A* tem coordenadas $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$.

Resposta: $\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right)$

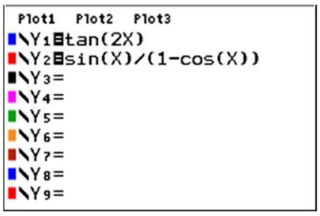
6. O ponto *P* tem coordenadas $(\cos\theta, \sin\theta)$.

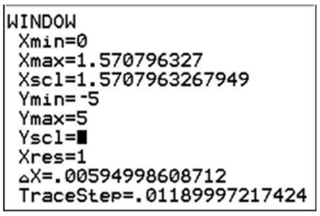
$$\beta = 2\theta \quad \text{e} \quad \tan\beta = \frac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$$

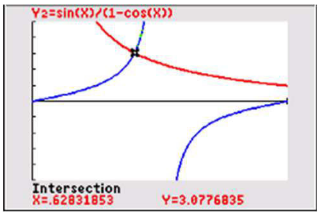
Para determinar θ, resolve-se graficamente a equação $\tan(2\theta) = \dfrac{\sin\theta}{1 - \cos\theta}$.

No menu *Funções*, inserem-se as expressões $\tan(2\theta)$ e $\dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$ e define-se uma janela adequada, atendendo a que $\theta \in \left]0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

Visualizam-se os gráficos.







Identifica-se o ponto de interseção dos gráficos das funções no respetivo domínio.

θ corresponde à abcissa do ponto de interseção.

$\theta \approx 0,6283$

A abcissa do ponto P é dada por $\cos\theta$.

Tomando para θ o valor encontrado, obtém-se $\cos(0,6283) \approx 0,81$.

A abcissa de P é, aproximadamente, 0,81.