

# 4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

2.º Período

11/03/20

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Considere duas caixas com bolas indistinguíveis ao tato.

- A caixa A tem 4 bolas, todas verdes.
- A caixa B tem  $n$  bolas ( $n > 1$ ), nenhuma delas verde.

Considere a seguinte experiência:

*Extrai-se, ao acaso, uma bola da caixa A e coloca-se na caixa B; em seguida, extraem-se, novamente ao acaso, duas bolas da caixa B.*

Qual é a probabilidade de nenhuma das duas bolas ser verde?

- (A)  $\frac{2}{n-1}$                       (B)  $\frac{n-1}{n+1}$                       (C)  $\frac{n}{n+1}$                       (D)  $\frac{4}{n-1}$

2. Considere o quadrilátero  $[OPQR]$  na circunferência trigonométrica da figura.

Tal como essa figura sugere:

- o ponto  $P$  pertence à circunferência e ao segundo quadrante;
- o ponto  $Q$  pertence ao semieixo negativo  $Ox$  e tem a mesma abcissa que  $P$ ;
- o ponto  $R$  pertence à circunferência e ao terceiro quadrante;
- o ponto  $A$  tem coordenadas  $(1,0)$ ;
- os ângulos  $AOP$  e  $POR$  são geometricamente iguais e cada um deles tem amplitude  $\alpha$  ( $\alpha \in ]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}[$ ).

2.1. Mostre que a área do quadrilátero  $[OPQR]$  é dada pela função  $f$ , definida por

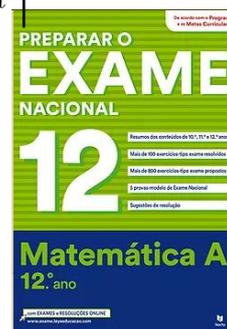
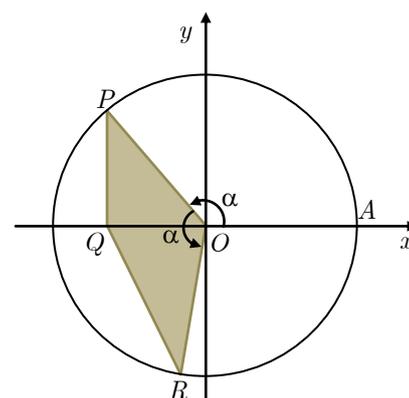
$$f(\alpha) = \frac{\text{sen}(2\alpha)(2\cos\alpha - 1)}{4}$$

2.2. Para um certo valor de  $\theta$ , tem-se  $\text{tg}\theta = -\frac{4}{3}$ , com  $\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{4}$ . Determine, para esse valor de  $\theta$ , a área do quadrilátero  $[OPQR]$ .

2.3. Considere a seguinte afirmação:

«  $\frac{2\pi}{3}$  é um maximizante da função  $f$ . »

Indique, justificando, se a afirmação anterior é verdadeira ou falsa.



3. Depositam-se 5000 euros, no regime de juros compostos, à taxa anual de 1,5% e com capitalizações diárias. Qual é, em euros e arredondado às unidades, o capital disponível ao fim de 3 anos?

(A) 6016                      (B) 5075                      (C) 5225                      (D) 5230

4. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \ln \sqrt{x}$ .

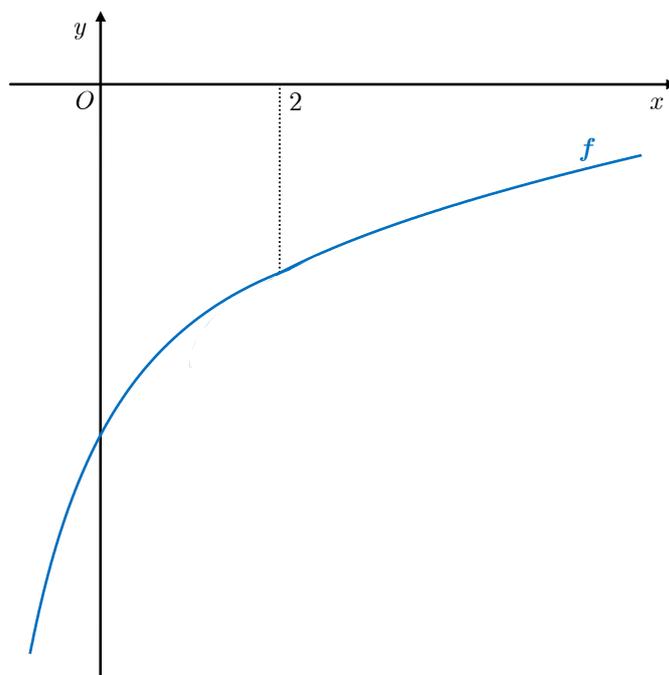
Considere a sucessão  $(u_n)$  de termo geral  $u_n = \left(\frac{6n^2-n}{6n^2+1}\right)^{3n}$ .

Qual é o valor de  $\lim f(u_n)$ ?

(A)  $\frac{5}{3}$                       (B)  $\frac{3}{4}$                       (C)  $-\frac{1}{3}$                       (D)  $-\frac{1}{4}$

5. Na figura do lado, está representada, em referencial o.n.  $xOy$ , parte do gráfico da função  $f$ , de domínio  $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ , definida por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{15-7x-e^{x-2}}{x^2-4} & \text{se } x < 2 \\ -2 & \text{se } x = 2 \\ \frac{x-2}{\sqrt{x-1}-1} - 4 & \text{se } x > 2 \end{cases}$$



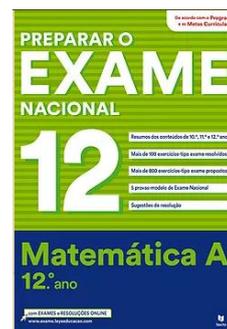
- 5.1. Mostre, sem a resolver, que a equação  $f(x) = -0,2$  é possível no intervalo  $]5, 10[$ .

- 5.2. Sobre as assíntotas verticais do gráfico de  $f$ :

(A) não existem;  
 (B) existe uma de equação  $x = 0$   
 (C) existe uma de equação  $x = -2$ ;  
 (D) existe uma de equação  $x = 5$ .

- 5.3. Mostre que, tal como é sugerido pela figura, a função  $f$  é contínua no ponto de abcissa 2.

6. Considere a função  $g$ , de domínio  $\mathbb{R}^-$ , definida por  $g(x) = x^3 e^{2x-1} - 5x$ . O gráfico de  $g$  tem uma assíntota oblíqua de equação  $y = mx$ . Determine  $m$ .



7. Seja  $a$  um número real superior a 1.

Qual é o valor de  $\frac{\log_a(32^{\ln a})}{5}$  ?

- (A)  $\frac{\ln 2}{5}$                       (B)  $\frac{\ln a}{5}$                       (C)  $\ln a$                       (D)  $\ln 2$

8. Escreva os conjuntos seguintes usando a notação de intervalos de números reais.

8.1.  $A = \{x \in \mathbb{R} : 5^{x+1} < 4 \times 5^{x-1} + 42\}$

8.2.  $B = \{x \in \mathbb{R} : \log_3(2x + 1) \geq \log_3(5 - x) - 2\}$

9. Seja  $f$  a função, de domínio  $\mathbb{R}^+$ , definida por  $f(x) = \log_2(8x)$ .

9.1. Considere a função  $g$ , definida no intervalo  $[1, 6]$  por  $g(x) = f(x) \times \text{sen } x$ .

Recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, visualize o gráfico da função  $g$  e reproduza-o na sua folha de prova.

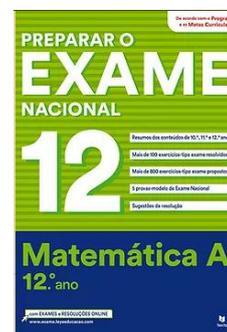
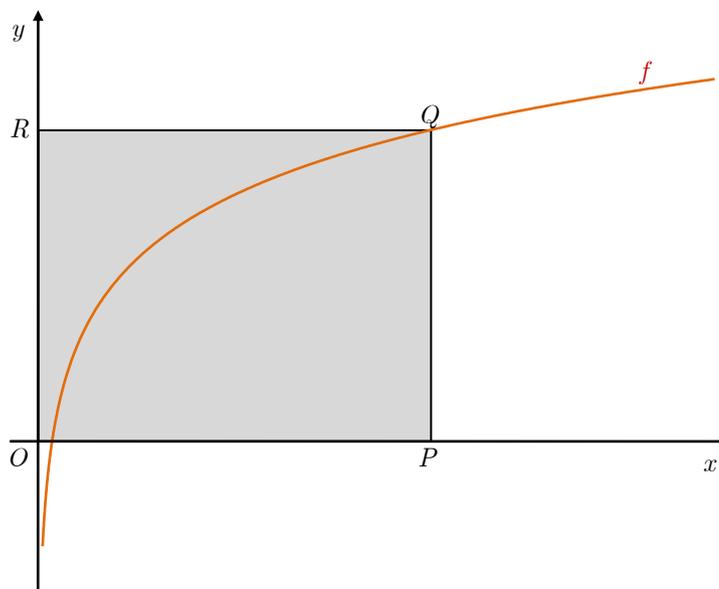
Com base nesse gráfico e utilizando as ferramentas adequadas da sua calculadora, resolva o seguinte problema:

Seja  $g'$  a função derivada de  $g$ . O conjunto solução da inequação  $g'(x) < 0$  é um intervalo aberto  $]a, b[$ . Determine os valores de  $a$  e de  $b$ . Apresente os resultados arredondados às centésimas.

Justifique a sua resposta.

9.2. Considere agora, no referencial o.n.  $xOy$  da figura a seguir:

- parte do gráfico da função  $f$ ;
- o retângulo  $[OPQR]$ .

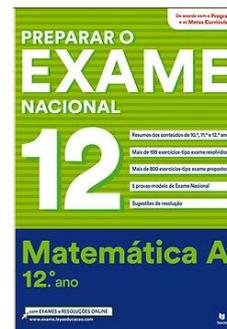


O ponto  $P$  pertence ao semieixo positivo  $Ox$ , o ponto  $Q$  pertence ao gráfico de  $f$  e tem a mesma abcissa de  $P$  e o ponto  $R$  pertence ao semieixo positivo  $Oy$  e tem a mesma ordenada de  $Q$ .

Seja  $a$  a abcissa do ponto  $P$ ,  $a > 0,125$ .

Mostre que a área do retângulo  $[OPQR]$  é dada pela expressão  $3a + 2a \log_4 a$ .

**FIM**



### COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.	4.	5.1.	5.2.	5.3.	6.	7.	8.1.	8.2.	9.1.	9.2.	200
8	15	19	15	8	8	15	8	19	15	8	15	19	14	14	

## Formulário

### Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

### Limites notáveis

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

### Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$