Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2019/2020)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

2.º Período | 05/02/20 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

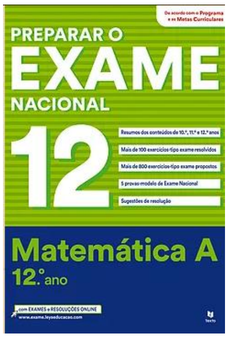
Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. A soma dos dois últimos elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 19.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos distintos dessa linha.

Qual é a probabilidade de esses dois elementos serem ambos superiores a $30\,000$?

(A) $\frac{5}{19} \times \frac{2}{9}$ **(B)** $2 \times \frac{{}^{5}C_2}{{}^{10}C_2}$ **(C)** $2 \times \frac{{}^{5}A_2}{{}^{19}A_2}$ **(D)** $\frac{6}{19} \times \frac{5}{18}$



2. A segunda edição dos Jogos Europeus foi realizada em Minsk (Bielorrússia) em junho de 2019 e participaram cinquenta países europeus.

2.1. Sobre os atletas portugueses que participaram nesses jogos:

- 14% deles pertenciam à Canoagem;
- 7 em cada 11 eram do sexo masculino;
- 7 em cada 22 eram do sexo feminino e não pertenciam à Canoagem.

Escolhe-se, ao acaso, um dos atletas portugueses do sexo masculino que participaram nos Jogos Europeus de Minsk.

Determine a probabilidade de ele pertencer à Canoagem.

Apresente o resultado em percentagem, arredondado às unidades.

2.2. Foram 20 os atletas do Atletismo que foram a Minsk, metades deles do Sporting CP.

Admita que 6 atletas do Atletismo se vão sentar, ao acaso, nos 6 lugares de uma certa fila do avião.

De quantas maneiras se podem sentar os atletas nessa fila se houver, pelo menos, 5 atletas do Sporting CP?

(A) $453\,600$ **(B)** $907\,200$ **(C)** $1\,965\,600$ **(D)** $3\,931\,200$

3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\cos x + \operatorname{sen} x = 0$.

A seguir estão duas resoluções de dois alunos:

<u>Resolução da Samira</u>

$$\cos x + \operatorname{sen} x = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}}{2}\cos x + \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen} x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\frac{\pi}{4}\cos(-x) - \operatorname{sen}\frac{\pi}{4}\operatorname{sen}(-x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \cos\frac{\pi}{4}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\frac{\pi}{4}} - x = \cancel{\frac{\pi}{4}} + 2\pi k \vee \frac{\pi}{4} - x = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x = -2\pi k \vee x = \frac{\pi}{2} - 2\pi k, k \in \mathbb{Z}}$$

<u>Resolução do Justiniano</u>

$$\cos x + \operatorname{sen} x = 0$$
$$\Leftrightarrow \cos x = -\operatorname{sen} x$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \operatorname{sen}(-x)$$
$$\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (-x)\right)$$
$$\Leftrightarrow \cancel{x} = \frac{\pi}{2} + \cancel{x} + 2\pi k \vee x = -\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{0 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k}_{\text{impossível}} \vee 2x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x = -\frac{\pi}{4} + \pi k, k \in \mathbb{Z}}$$

Apenas uma das resoluções está certa. Indique qual a certa e proponha uma alteração na resolução errada de modo a torná-la correta.

4. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R} \setminus \{0, 3\}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{3x - x^2} & \text{se } x < 3 \\ 2x\operatorname{sen}\left(\dfrac{\pi}{x}\right) & \text{se } x > 3 \end{cases}$.

4.1. Verifique se existe $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$.

4.2. Estude o gráfico de f quanto à existência de assíntotas paralelas ao eixo das abcissas e indique, se existir(em), a(s) sua(s) equação(ões).

5. Sejam k um número real e g a função, de domínio $\left]-\pi, +\infty\right[$, definida por $g(x) = \begin{cases} \dfrac{2x}{k\cos\left(\frac{\pi}{2} + 5x\right)} & \text{se } x < 0 \\ x + 8 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$.

Determine k de modo que g seja contínua no seu domínio.

6. Seja f a função, de domínio $\left]0, \frac{\pi}{12}\right[$, definida por $f(x) = \operatorname{tg}(6x)$.

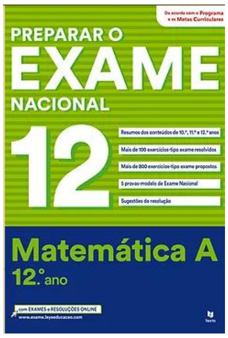
6.1. Indique a proposição verdadeira.

(A) $x = \frac{\pi}{12}$ é a equação da assíntota vertical do gráfico de f porque $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{12}^-} f(x) = 0$.

(B) $x = \frac{\pi}{12}$ é a equação da assíntota vertical do gráfico de f porque $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{12}^-} f(x) = +\infty$.

(C) $x = 0$ é a equação da assíntota vertical do gráfico de f porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

(D) $x = 0$ é a equação da assíntota vertical do gráfico de f porque $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 0$.



6.2. Pretende-se determinar a abcissa a de um ponto sabendo que a reta tangente ao gráfico de f nesse ponto é paralela à reta de equação $y = 18x - 10$.
Qual das seguintes equações traduz este problema?

(A) $\cos^2(6a) = \frac{1}{6}$ **(B)** $\cos^2(6a) = -\frac{1}{4}$ **(C)** $\operatorname{tg}^2(6a) = 2$ **(D)** $\operatorname{tg}^2(6a) = 3$

6.3. Na figura do lado, estão representadas, em referencial o.n. xOy:

- parte do gráfico da função g, prolongamento da função f ao domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ e definida por $g(x) = f\left(\frac{x}{6}\right) + 1$;
- parte do gráfico da função h, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $h(x) = \cos x$;
- o triângulo $[OPQ]$, sendo P um ponto do gráfico da função g e Q um ponto do gráfico da função h, ambos com a mesma abcissa.

Seja $a > 0$ a abcissa comum dos pontos P e Q.

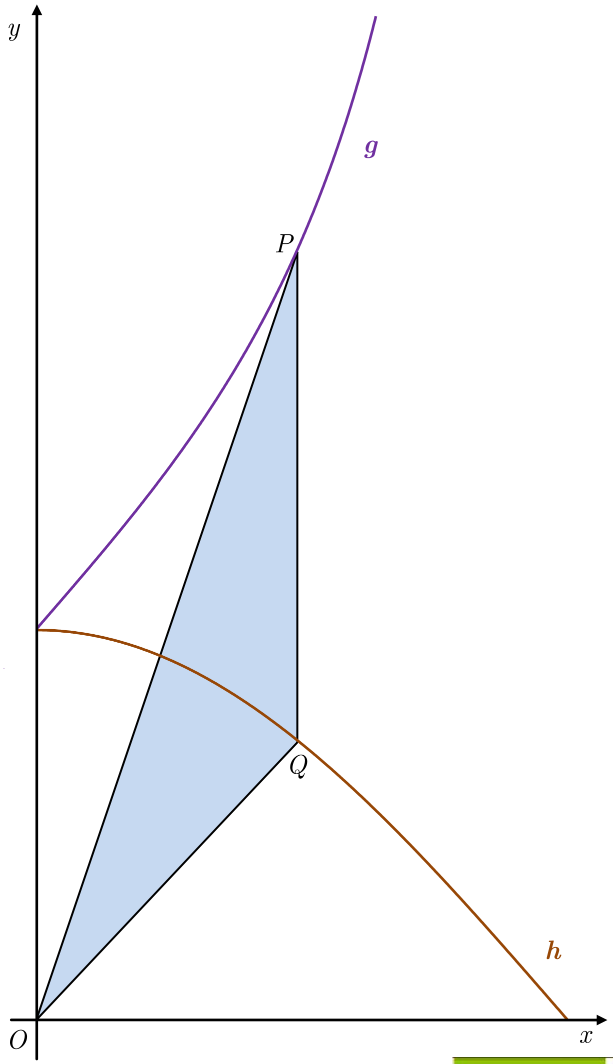
Recorrendo à calculadora gráfica, determine o valor de a para o qual a área do triângulo $[OPQ]$ é igual a $0{,}4$, sabendo-se que esse valor existe e é único.

Na sua resposta:

– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;

– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;

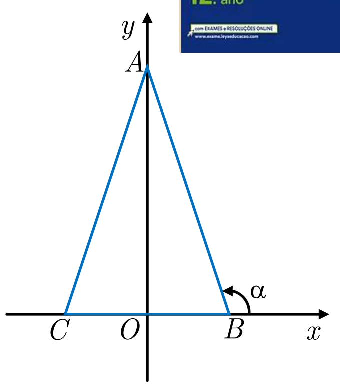
– apresente o valor de a arredondado às centésimas; se necessário, nas coordenadas de pontos, considere, pelo menos, duas casas decimais.



7. Considere o triângulo $[ABC]$ representado no referencial o.n. xOy da figura.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao eixo Oy e tem ordenada 2;
- os pontos B e C pertencem ao eixo Ox e têm abcissas simétricas;
- α é a amplitude, em radianos, do ângulo cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{B}A$;
- $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.



Seja P a função que dá o perímetro do triângulo $[ABC]$ em função de α.

7.1. Mostre que $P(\alpha) = \dfrac{4(1-\cos\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$.

7.2. Determine o declive da reta tangente ao gráfico da função P no ponto de abcissa $\frac{3\pi}{4}$.

Sugestão: Comece por mostrar que $P'(\alpha) = \dfrac{P(\alpha)}{\operatorname{sen}\alpha}$.

8. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x) = 4\cos^2\left(\frac{x}{4}\right)$.

8.1. Mostre que:

- $g'(x) = -\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right)$;
- g é monótona em $[-2\pi, 0]$ e determine as abcissas dos extremos relativos, caso existam.

8.2. No intervalo $[0, \pi]$, o gráfico de g admite uma reta tangente de declive mínimo m e outra reta tangente de declive máximo M.

Qual é a proposição verdadeira?

(A) $m = -\frac{1}{2} \wedge M = 2$ **(B)** $m = -\frac{1}{2} \wedge M = 0$

(C) $m = -1 \wedge M = 2$ **(D)** $m = -1 \wedge M = 0$

9. Considere a função f, de domínio $\left]\frac{\pi}{4}, \pi\right[\setminus \left\{\frac{\pi}{2}\right\}$, definida por $f(x) = \frac{\operatorname{sen}(4x)\operatorname{sen}(2x) - \operatorname{sen}^2(2x)}{\cos(4x) - 1}$.

9.1. Mostre que $f(x) = \frac{1}{2} - \cos(2x)$.

9.2. Determine, se existirem, as abcissas dos pontos de interseção entre o gráfico de f e a reta de equação $y = 1$.

FIM

COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.1.**	**4.2.**	**5.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.1.**	**9.2.**	
8	14	8	12	14	14	14	8	8	14	14	18	18	8	14	14	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \ \cos b + \operatorname{sen} b \ \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \ \cos b - \operatorname{sen} a \ \operatorname{sen} b$

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)' = u' \cos u$

$(\cos u)' = -u' \operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)' = u'e^u$

$(a^u)' = u'a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$