



www.esfranco.edu.pt

(2019/2020)

1.º Período

04/12/19

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

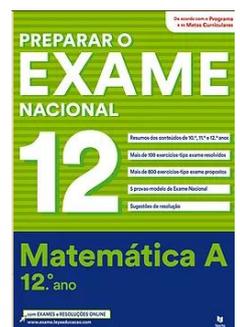
--	--	--

O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O Arte Sport Clube (A.S.C.) é um clube com algumas modalidades desportivas, das quais se destaca a dança.
- 1.1. Vai haver uma reunião entre os sete dirigentes do A.S.C. e os cinco treinadores de dança do clube.
- 1.1.1. Todas as pessoas vão entrar na sede do clube, uma de cada vez.
Qual é a probabilidade de os treinadores de dança entrarem consecutivamente?
- (A) $\frac{1}{792}$ (B) $\frac{1}{99}$ (C) $\frac{1}{88}$ (D) $\frac{1}{645}$
- 1.1.2. Das doze pessoas que vão participar na reunião, oito são homens e, destes, metade são dirigentes do A.S.C. com mais de 50 anos.
Vão sentar-se três pessoas nas três cadeiras lado a lado da cabeceira da mesa da reunião.
Sejam A , B e C os acontecimentos seguintes.
 A : «As pessoas que se sentam na cabeceira são dirigentes do A.S.C.»
 B : «As pessoas que se sentam na cabeceira têm mais de 50 anos.»
 C : «As pessoas que se sentam na cabeceira são homens.»
Determine, sem usar a fórmula da probabilidade condicionada, $P((A \cap B) | C)$.
Comece por explicar, no contexto do problema, o significado de $P((A \cap B) | C)$, o número de casos possíveis e o número de casos favoráveis.
Apresente o resultado na forma de fração irredutível.
- 1.2. Sobre o A.S.C., sabe-se que:
- 30% dos atletas do clube praticam dança;
 - de entre os praticantes de dança, 90% são do sexo feminino;
 - 42% dos atletas do clube são do sexo masculino e não praticam dança.
- Escolhe-se, ao acaso, um dos atletas do clube.
Considere os acontecimentos seguintes.
 D : «O atleta pratica dança.»
 F : «O atleta é do sexo feminino.»
Averigue se os acontecimentos D e F são independentes.



2. 2.1. Num espaço de probabilidades $(E, \mathcal{P}(E), P)$, considere $A, B \in \mathcal{P}(E)$ tal que $P(A | B) \neq P(A \cap B)$. Prove, desde que faça sentido, que $P(A | \bar{B}) = \frac{P(A \cup B) \times P(A|B) - P(A \cap B)}{P(A|B) - P(A \cap B)}$.

2.2. A 81.^a Volta a Portugal em ciclismo decorreu em agosto deste ano. Sobre a classificação final, sabe-se que:

- 5% dos ciclistas eram da equipa vencedora, o W52/FC Porto, e concluíram, todos a Volta em menos de 42 horas;
- 47% dos ciclistas eram do W52/FC Porto ou concluíram a Volta em menos de 42 horas;
- de entre os ciclistas do W52/FC Porto, 5 em cada 7 concluíram a Volta em menos de 42 horas.

Escolhe-se, ao acaso, um dos ciclistas participantes na 81.^a Volta a Portugal.

2.2.1. Qual é a probabilidade de ele ser do W52/FC Porto?

- (A) 7% (B) 6% (C) 5% (D) 8%

2.2.2. Qual é a probabilidade de ele ter concluído a Volta em menos de 42 horas se não for do W52/FC Porto?

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em 2.1.. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B , no contexto da situação apresentada.



3. Quando a Rosário chega a casa, os seus dois gatos, o *Undercover* e o Antena, podem estar ou não no sofá. Ela sabe que:

- a probabilidade de não encontrar o Antena no sofá é o triplo de encontrar o *Undercover* ;
- a probabilidade de encontrar o *Undercover* e o Antena no sofá é o dobro de encontrar apenas o *Undercover* no sofá.



Num certo dia, a Rosário chega a casa e o Antena não se encontra no sofá. Determine a probabilidade de o *Undercover* estar no sofá.

4. O Bugatti Chiron Sport é um dos automóveis mais rápidos do mundo. Admita que a distância, em metros, percorrida por um Bugatti Chiron Sport, t segundos após o início de um teste, foi dada pela função definida por

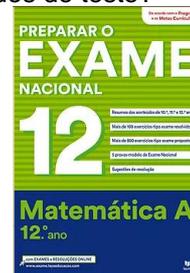


$$d(t) = -0,018t^3 + 2,71t^2, \text{ onde } t \in [0, 60].$$

4.1. Qual foi a velocidade média do Bugatti, em metros por segundo, nos primeiros trinta segundos do teste?

- (A) 36,6 (B) 46,9 (C) 58,5 (D) 65,1

4.2. Determine a velocidade máxima alcançada pelo Bugatti Chiron Sport durante o teste. Apresente o resultado em quilómetros por hora, arredondado às unidades. Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

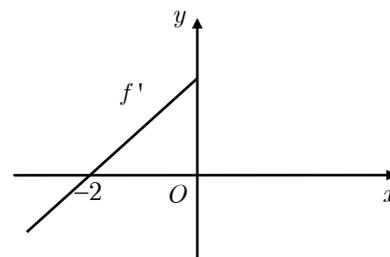


5. Sejam f e f' duas funções de domínio \mathbb{R} e tais que:

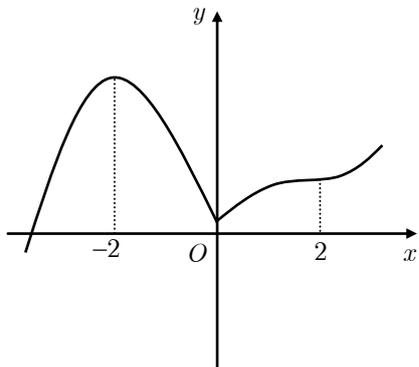
- $f'(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}_0^+ \setminus \{2\}$;
- $f'(2) = 0$.

Ao lado está a parte do gráfico da função f' em \mathbb{R}_0^- .

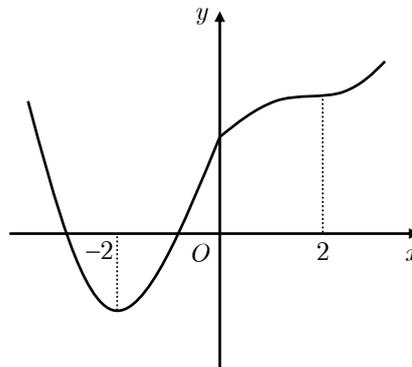
Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função f ?



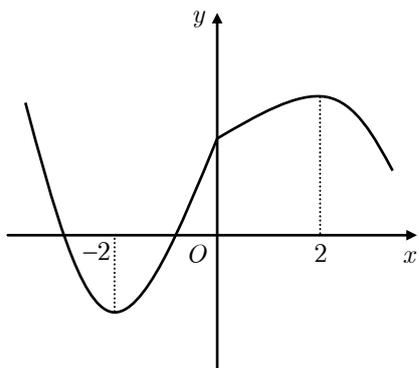
(A)



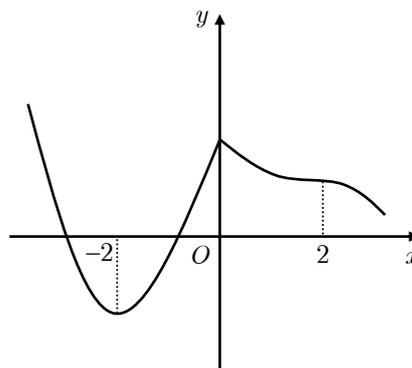
(B)



(C)



(D)



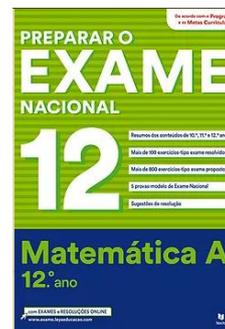
6. Seja f a função, de domínio \mathbb{R} , definida por $f(x) = x^3 - 3x^2 + 6$.

6.1. Determine, usando a definição de derivada num ponto, $f'(-1)$.

6.2. Verifique que a equação $f(x) = 5$ tem uma única solução em $]0, 2[$ e, utilizando a calculadora gráfica, determine a solução desta equação, nesse intervalo.

Na sua resposta:

- recorra ao teorema de Bolzano-Cauchy para provar que a equação $f(x) = 5$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo $]0, 2[$;
- prove que essa solução é única;
- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) que visualizar na calculadora, devidamente identificado(s);
- apresente a solução pedida arredondada às centésimas.



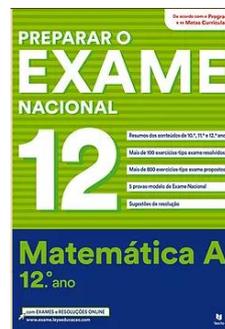
7. Seja g uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ e tal que $g'(x) = \frac{6-2x^2}{x+2}$.
- 7.1. Sabe-se que 1 é um zero de g .
Em qual das opções a seguir está uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de g no ponto 1?
- (A) $(x, y) = (0, 1) + k(3, 4), k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y) = (0, 1) + k(4, -3), k \in \mathbb{R}$
- (C) $(x, y) = (1, 0) + k(-6, -8), k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y) = (1, 0) + k(8, -6), k \in \mathbb{R}$
- 7.2. Estude a função g quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para baixo;
 - o(s) intervalo(s) onde o gráfico de g tem a concavidade voltada para cima;
 - a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de g .

8. Considere a função f , diferenciável em \mathbb{R} , e tal que $y = 2x - 1$ é a reta tangente ao gráfico de f no ponto 0.

Considere também a função g , de domínio \mathbb{R} , definida por $g(x) = \begin{cases} 4x^2 + 2p & \text{se } x \leq 0 \\ \frac{5-x}{f(x)+1} & \text{se } x > 0 \end{cases}$, com $p > 0$.

Determine p de modo que se possa aplicar o teorema de Bolzano-Cauchy à função g no intervalo $[-1, 1]$.

FIM DO TESTE



COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.1.1.	1.1.2.	1.2.	2.1.	2.2.1.	2.2.2.	3.	4.1.	4.2.	5.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	8.	200
8	16	16	16	8	16	16	8	16	8	12	20	8	16	16	

Formulário

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$