Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2019/2020)

1.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 7

1.º Período | 16/10/19 | Duração: 90 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

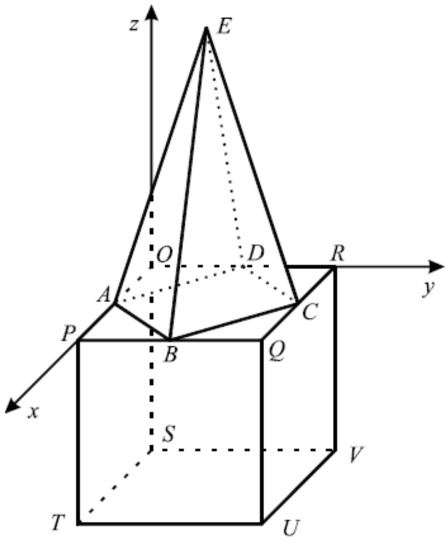
Caderno 1: 50 minutos
(é permitido o uso de calculadora)

1. Dado o desenvolvimento de $\left(x^2+\frac{2}{x}\right)^{11}$, com $x>0$, calcule, se existir, o coeficiente do termo em x.

2. Na figura está representado, em referencial o.n. $Oxyz$, um sólido que pode ser decomposto no cubo $[OPQRSTUV]$ e na pirâmide quadrangular regular $[ABCDE]$.

A origem do referencial é um dos vértices do cubo, o vértice P pertence ao eixo Ox e o vértice R pertence ao eixo Oy.

Os vértices da base da pirâmide são os pontos médios dos lados do quadrado $[OPQR]$.



2.1. Considere todos os conjuntos que são constituídos por quatro dos treze vértices dos dois poliedros (como, por exemplo, o conjunto $\{A,\ B,\ C,\ S\}$).

2.1.1. Quantos desses conjuntos são constituídos por quatro vértices do mesmo poliedro?

2.1.2. Quantos desses conjuntos contêm apenas um vértice do plano xOy?

2.2. Suponha que se pretende pintar todas as faces visíveis do sólido (isto é, as quatro faces laterais da pirâmide e as seis do cubo) com 9 cores disponíveis. Devem ser respeitadas as seguintes condições:

- cada face é pintada com uma única cor;
- as faces da pirâmide com uma aresta em comum não podem ficar pintadas com a mesma cor;
- todas as seis faces do cubo têm de ser pintadas com cores diferentes entre si e diferentes das cores das faces da pirâmide.

De quantas maneiras diferentes pode ficar pintado o sólido?

Adaptado do 1.º teste intermédio do 10.º ano de 2009

3. Para uma pessoa fazer o pagamento de um certo serviço, um banco online pede um *PIN* de 6 algarismos, que é enviado para o telemóvel dessa pessoa.

3.1. Quantos são os *PIN* que representam um número par, capicua e superior a $500\,000$?

(A) 200 **(B)** 300 **(C)** 400 **(D)** 500

3.2. Determine o número de *PIN* com os algarismos todos diferentes e com apenas um algarismo 8 ou um algarismo 9 (mas não ambos).

4. A atleta norte americana Allyson Felix possui, no total, 26 medalhas, entre Jogos Olímpicos e Campeonatos Mundiais de Atletismo, sendo 19 de ouro, 5 de prata e duas de bronze.

4.1. Admita que Allyson Felix escolhe, ao acaso, 10 medalhas, metade das quais de ouro.

Quantas são as escolhas possíveis?

(A) $244\,188$ **(B)** $328\,900$ **(C)** $11\,628$ **(D)** $764\,889\,840$

4.2. Admita agora que Allyson Felix vai colocar as 26 medalhas (que são todas diferentes) num mostruário, lado a lado, para exibir aos seus amigos.

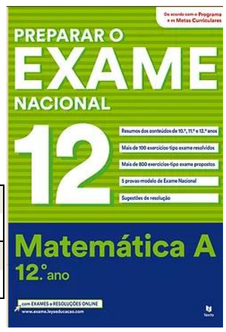
De quantas maneiras consegue ela colocar as medalhas no mostruário de modo a não haver medalhas de prata juntas?

Apresente o resultado na forma $a \times 10^n$, com a arredondado às décimas e $n \in \mathbb{N}$.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item								
Cotação (em pontos)								
1.	2.1.1.	2.1.2.	2.2.	3.1.	3.2.	4.1.	4.2.	
18	13	13	17	8	17	8	17	**111**



Caderno 2: 40 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

5. Considere, num universo U, os subconjuntos A, B e C.
Sabendo que $A, B \subset C$, a que é igual a expressão $\overline{C} \cap \overline{A} \cap B$?

(A) $A \cup B$ **(B)** $\overline{A}$ **(C)** $\overline{B}$ **(D)** $\overline{C}$

6. Considere todas as palavras, com ou sem sentido, que se podem formar com 10 letras.
Considerando as 26 letras do alfabeto, quantas dessas palavras existem com apenas quatro letras Z?

(A) $26^6 \times {}^{24}C_4$ **(B)** $25^6 \times {}^{10}C_4$ **(C)** ${}^{25}A_6 \times {}^{10}C_4$ **(D)** ${}^{26}A_6 \times {}^{24}C_4$

7. No dia 2/10/2019, a Escola Secundária de Francisco Franco reuniu os seus alunos do 12.º ano para formar uma comissão de finalistas com 5 elementos.

7.1. Admita que existem, no total, 350 raparigas e 300 rapazes no 12.º ano nessa escola.
Quantas das comissões que se podem formar têm pelo menos uma rapariga e pelo menos um rapaz?

(A) ${}^{350}C_1 \times {}^{300}C_4 + {}^{350}C_4 \times {}^{300}C_1$ **(B)** ${}^{650}C_5 - \left({}^{350}C_5 + {}^{300}C_5\right) \times {}^{5}A_5$

(C) ${}^{350}C_1 + {}^{300}C_1$ **(D)** ${}^{650}C_5 - {}^{350}C_5 - {}^{300}C_5$

7.2. Sabe-se que a comissão será constituída por um presidente, um secretário, um tesoureiro e dois vogais.
Quantas são as comissões possíveis?
Apresentam-se, em seguida, duas respostas de dois alunos.

Ariana: $\dfrac{{}^{650}A_5}{2}$ Celino: ${}^{650}C_3 \times {}^{647}C_2$

Apenas uma das respostas está correta. Elabore uma composição na qual:

• identifique a resposta correta;
• explique o raciocínio que conduz à resposta correta;
• proponha uma alteração na expressão da resposta incorreta, de modo a torná-la correta;
• explique, no contexto do problema, a razão da alteração.

8. Considere o Triângulo de Pascal.

8.1. Dado um número natural superior a 3, seja $3n-11$ uma linha do Triângulo de Pascal.

Sabendo que o quinto elemento dessa linha é igual ao enésimo elemento, determine quantos elementos tem a linha.

8.2. A soma dos seis menores elementos de uma certa linha do Triângulo de Pascal é igual a 602.

Justifique que o terceiro elemento da linha seguinte do triângulo é igual a 300.

9. Resolva, em $\mathbb{N} \setminus \{1\}$, a equação $18 \times {}^{n+6}C_5 \times {}^{n+8}A_2 = \frac{(n-2) \times {}^{n+8}A_{n+3}}{n!}$.

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
5.	**6**	**7.1.**	**7.2.**	**8.1.**	**8.2.**	**9.**	
8	8	8	18	13	17	17	**89**
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							**200**