Física na Lixa

Pêndulo Gravítico Simples

PÊNDULO GRAVÍTICO SIMPLES

Na análise do comportamento do pêndulo gravítico simples considera-se que este é um sistema constituído por uma partícula material de massa m suspensa de um ponto O por um fio inextensível de comprimento L e de massa desprezável, como mostra a figura 1.

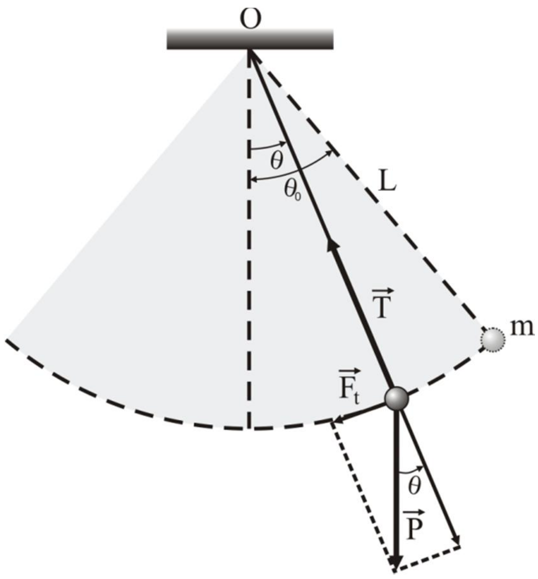

Figura 1. Movimento oscilatório de um pêndulo gravítico simples.

Quando a partícula é afastada da sua posição de equilíbrio de um ângulo θ_0, passa a ter um movimento oscilatório em torno do seu ponto mais baixo (posição de equilíbrio), numa trajectória que é um arco de circunferência de raio igual ao comprimento do fio (L).

Desprezando a resistência do ar, as únicas forças que actuam na partícula são a tensão ($\vec{T}$) e o peso ($\vec{P}$). A figura 1. mostra que a componente tangencial da força resultante ($\overrightarrow{F_t}$) tem a intensidade $mg\text{sen}\theta$ e aponta sempre para a posição de equilíbrio, tratando-se, assim, de uma força restauradora.

Aplicando a segunda lei de Newton à componente tangencial do movimento, temos:

$$\left\|\vec{F}_t\right\| = m\|\vec{a}_t\| \Rightarrow -m\|\vec{g}\|\text{sen}\theta = m\|\vec{a}_t\| \qquad (1)$$

onde o sinal negativo indica que $\overrightarrow{F_t}$ aponta no sentido da posição de equilíbrio.

Como o movimento é circular de raio L, temos

$$-m\|\vec{g}\|\text{sen}\theta = mL\frac{d^2\theta}{dt^2} \tag{2}$$

ou

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\|\vec{g}\|}{L}\text{sen}\theta = 0 \tag{3}$$

O desenvolvimento em série de Taylor do $\text{sen}\theta$ dá

$$\text{sen}\theta = \theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 - \cdots \tag{4}$$

Esta equação mostra que, para pequenas oscilações, isto é, valores de θ inferiores a 0,2 rad, $\text{sen}\theta \cong \theta$.

Nestas condições, a equação (3) pode escrever-se,

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\|\vec{g}\|}{L}\theta = 0 \tag{5}$$

A solução desta equação diferencial é

$$\theta(t) = \theta_0 cos(\omega t + \varphi) \quad , \tag{6}$$

que é a equação do movimento harmónico simples, em que θ_0 é a amplitude do movimento, φ a fase inicial e ω a frequência angular de valor

$$\omega = \sqrt{\frac{\|\vec{g}\|}{L}} \tag{7}$$

Sabendo que

$$\omega = \frac{2\pi}{\text{T}_0} \quad , \tag{8}$$

podemos expressar o período de oscilação do pêndulo gravítico simples, para pequenas oscilações, como

$$\text{T}_0 = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\|\vec{g}\|}} \tag{9}$$

Pela equação (9) podemos concluir que o período do pêndulo gravítico simples, para pequenas oscilações, depende apenas do comprimento do fio (L) e do valor da aceleração da gravidade ($\|\vec{g}\|$), sendo independente da amplitude de oscilação e da massa da partícula. Assim, as oscilações são isócronas.

Da equação (4) concluímos que, para grandes amplitudes, a aproximação sen$\theta \cong \theta$ não é válida. Veremos a seguir que, neste caso, o período do pêndulo gravítico é uma função da amplitude inicial.

Vamos aplicar a lei da conservação da energia mecânica para facilitar o cálculo do período do pêndulo, caso contrário teríamos que integrar duas vezes a equação (3), até se obter $\theta(t)$.

$$m\|\vec{g}\|L(1-\cos\theta_0)=\frac{1}{2}mL^2\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2+m\|\vec{g}\|L(1-\cos\theta) \tag{10}$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2\|\vec{g}\|(\cos\theta-\cos\theta_0)}{L}} \tag{11}$$

$$\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}d\theta=\sqrt{\frac{2\|\vec{g}\|}{L}}dt \tag{12}$$

$$\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}d\theta=\sqrt{\frac{2\|\vec{g}\|}{L}}t \tag{13}$$

A partícula demora um quarto de período a oscilar de $\theta=0$ até $\theta=\theta_0$. Assim,

$$\mathrm{T}=4\sqrt{\frac{L}{2\|\vec{g}\|}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}d\theta \tag{14}$$

Substituindo a relação trigonométrica

$$\cos\theta=1-2\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2} \tag{15}$$

na equação (14), vem

$$\mathrm{T}=4\sqrt{\frac{L}{2\|\vec{g}\|}}\int_0^{\theta_0}\frac{1}{\sqrt{2\left(\mathrm{sen}^2\frac{\theta_0}{2}-\mathrm{sen}^2\frac{\theta}{2}\right)}}d\theta \tag{16}$$

Fazendo $k=\mathrm{sen}\frac{\theta_0}{2}$ e definindo uma nova variável ϕ como sendo

$$\mathrm{sen}\phi=\frac{\mathrm{sen}\frac{\theta}{2}}{\mathrm{sen}\frac{\theta_0}{2}}\quad, \tag{17}$$

a equação (16) fica

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{\|\vec{g}\|}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1-k^2\text{sen}^2\phi}}\,d\phi \tag{18}$$

Note que, como θ varia entre 0 e θ_0, então, pela equação (17), ϕ varia entre 0 e $\frac{\pi}{2}$.

Consideremos a fórmula do desenvolvimento binomial,

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}x^n \qquad \text{com } |x|<1, \tag{19}$$

onde $$\binom{\alpha}{n} \equiv \frac{\alpha!}{(\alpha-n)!\,n!}$$

ou, simplesmente,

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3+\cdots \tag{20}$$

Aplicando a fórmula anterior à equação (18) em que $x=-k^2\text{sen}^2\phi$ e $\alpha=-\frac{1}{2}$, temos

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{\|\vec{g}\|}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(1+\frac{1}{2}k^2\text{sen}^2\phi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4 sen^4\phi+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6 sen^6\phi + \cdots\right)d\phi$$

$$T = 4\sqrt{\frac{L}{\|\vec{g}\|}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi+\frac{1}{2}k^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\text{sen}^2\phi d\phi+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}k^4\int_0^{\frac{\pi}{2}}sen^4\phi d\phi + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}k^6\int_0^{\frac{\pi}{2}}sen^6\phi\, d\phi+\cdots\right) \tag{21}$$

Sabendo que $\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^n\phi d\phi = \frac{n-1}{n}\int_0^{\frac{\pi}{2}} sen^{n-2}\phi d\phi$ e $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\phi = \frac{\pi}{2}$, então a solução da equação 21 é

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\|\vec{g}\|}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k^2+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2k^4+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2k^6+\cdots\right] \tag{22}$$

Substituindo o valor de k na equação anterior, temos, finalmente

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\|\vec{g}\|}}\left[1+\left(\frac{1}{2}\right)^2 sen^2\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 sen^4\frac{\theta_0}{2}+\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^2 sen^6\frac{\theta_0}{2}+\cdots\right] \quad (23)$$

Podemos concluir que as oscilações do pêndulo gravítico simples não são isócronas, no entanto, fica confirmado que, para pequenas oscilações, a influência da amplitude no seu período é perfeitamente desprezável (figura 2).

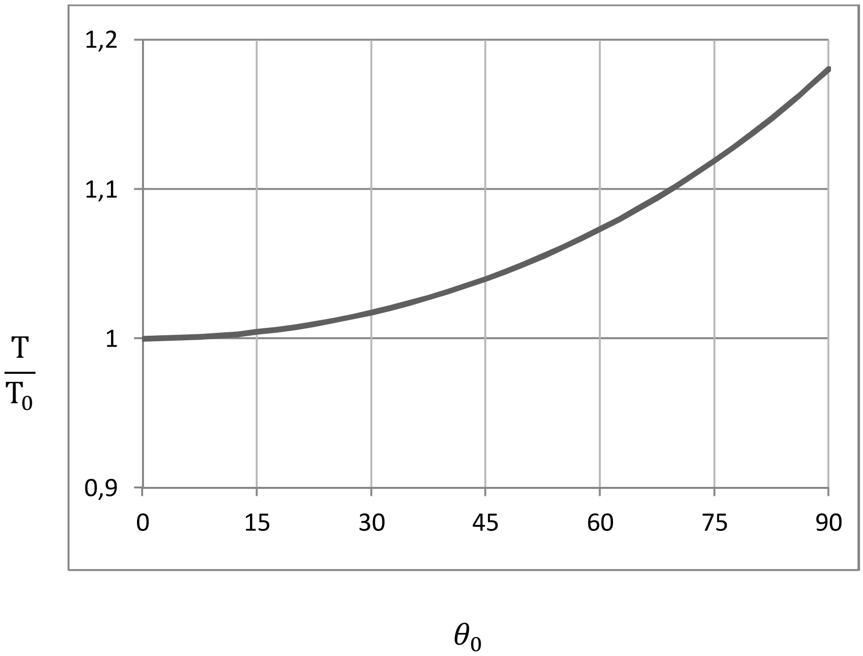

Figura 2. $\frac{T}{T_0}$ em função da amplitude inicial θ_0.