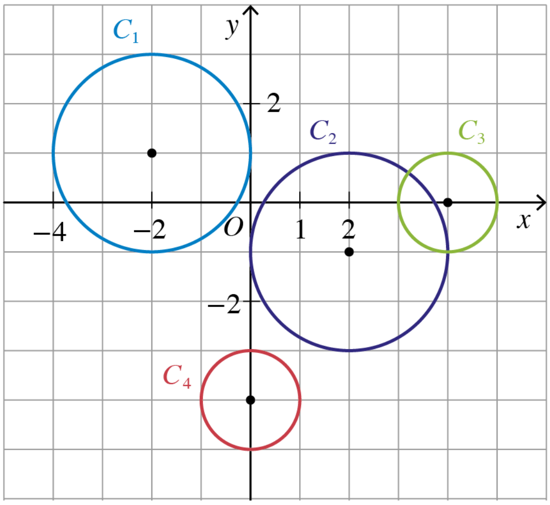
Nome: ____

Ano / Turma: _________ **N.º:** _____ **Data:** ____ - ____ - ____

1. No referencial da figura estão representadas as circunferências C_1, C_2, C_3 e C_4.



Qual das circunferências pode ser caracterizada pela condição:

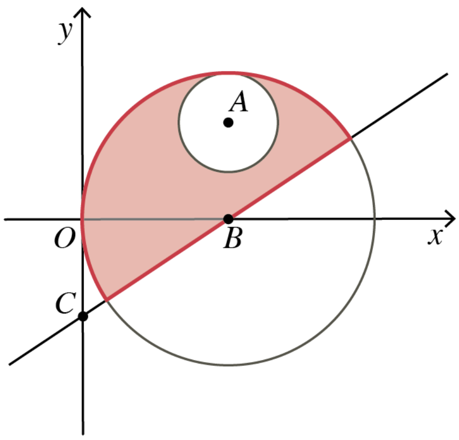
$$x^2+y^2+4x-2y+1=0$$

(A) C_1 **(B)** C_2 **(C)** C_3 **(D)** C_4

2. Na figura, em referencial cartesiano Oxy, estão representados os pontos $A(3,2)$, $B(3,0)$ e C e duas circunferências centradas em A e B.

Sabe-se que:

- a circunferência de centro B é tangente ao eixo Oy;
- a circunferência de centro A tem raio 1;
- o ponto C pertence ao eixo Oy;
- a reta BC é representada pela equação $3y-2x+6=0$.



2.1 Determina as coordenadas do ponto C.

2.2 Representa a reta BC através de uma equação vetorial.

2.3 Representa o conjunto de pontos da região colorida da figura através de uma condição.

2.4 Determina a equação reduzida da reta paralela a BC e que passa pelo ponto A.

2.5 Um valor, arredondado às unidades, da área da região colorida, é:

(A) 25 **(B)** 13 **(C)** 6 **(D)** 11

3. Dado um referencial o.n., considera os pontos:

$$A(-1,6),\ B(2,5) \text{ e } C\left(\frac{2}{3},-4\right) P\left(1-4m\ ,\ 9m^2-9\right),\ m \in \mathbb{R}$$

3.1 Determina m de modo que $\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB}$.

3.2 A reta AB é estritamente paralela à reta representada por uma das seguintes equações. Indica qual.

(A) $(x,y)=(1,7)+k(2,-6),\ k \in \mathbb{R}$

(B) $(x,y)=(9,\ 2)+k(-6,2),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x,y)=(2,\ 5)+k(-1,6),\ k \in \mathbb{R}$

(D) $(x,y)=(-1,\ 6)+k(3,-1),\ k \in \mathbb{R}$

3.3 Qual das condições representa a semirreta $\dot{B}A$?

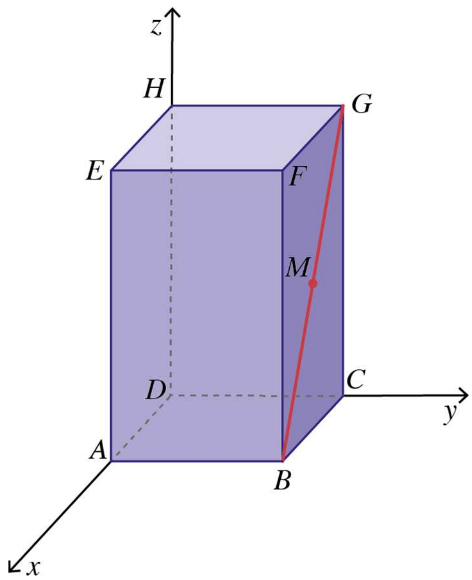
(A) $(x,y)=(-1,6)+k(-3,1),\ k \in \mathbb{R}_0^+$

(B) $(x,y)=(2,5)+k(-3,1),\ k \in \mathbb{R}$

(C) $(x,y)=(2,5)+k(-3,1),\ k \in \mathbb{R}_0^+$

(D) $(x,y)=(-1,6)+k(3,-1),\ k \in \mathbb{R}$

4. Considera o prisma quadrangular regular [$ABCDEFGH$] representada na figura à qual foi aplicada um referencial o.n. com origem em D.



Os pontos A e C pertencem respetivamente aos eixos das abcissas e das ordenadas, tal como a figura sugere.
Sabe-se que as coordenadas do ponto A e G são: (3,0,0) e (0,3,6), respetivamente.

4.1 A aresta [EF] é definida pela condição:

(A) $x=3 \ \wedge \ z=6$

(B) $y=3 \ \wedge \ z=6 \ \wedge \ 0 \leq x \leq 3$

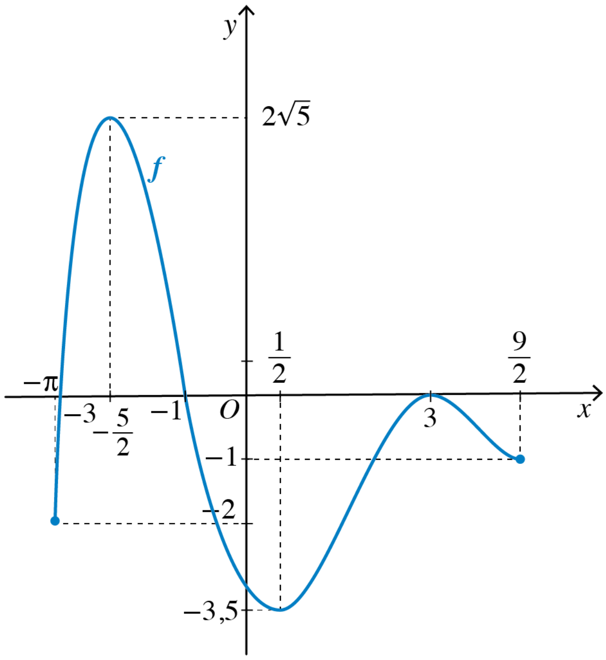
(C) $z=6 \ \wedge \ y=3$

(D) $x=3 \ \wedge \ z=6 \ \wedge \ 0 \leq y \leq 3$

4.2 Determina uma equação cartesiana do plano mediador do segmento de reta [AG].

4.3 Seja M o ponto médio de [BG].
Determina o ponto de interseção da reta AM com o plano que contém a face [$EFGH$].

5. Na figura está representada a função f, real de variável real, de domínio $\left[-\pi, \frac{9}{2}\right]$.



5.1 Identifica o contradomínio da função.

5.2 Indica qual das opções representa o valor de: $f(-\pi)+f\left(-\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{9}{2}\right)$

(A) $\sqrt{5}$ **(B)** $2\sqrt{5}-3$ **(C)** $2\sqrt{5}-1$ **(D)** $-\sqrt{5}$

5.3 Indica, justificando, o valor lógico da afirmação $f(1)\times f(4)<0$.

5.4 Constrói uma tabela de sinais e indica os valores do domínio que satisfazem a condição $f(x)\geq 0$.

5.5 Identifica os intervalos de monotonia e extremos da função.

5.6 Considera a equação $f(x)=k$.

Indica para que valores de k a equação tem duas e só duas soluções.

5.7 Indica o domínio e o contradomínio da função g tal que $g(x)=2f(x-\pi)$.

6. Seja g uma função afim tal que $g(x)=3x-12kx+5$. Determina os valores de k para os quais a função g é uma função decrescente .

FIM

Questões	1.	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5	3.1	3.2	3.3	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2	5.3	5.4	5.5	5.6	5.7	6.	Total
Cotação (pontos)	10	10	10	12	10	5	12	10	10	10	10	15	5	5	10	12	10	12	10	12	200

1. $x^2+y^2+4x-2y+1=0 \Leftrightarrow x^2+4x+2^2-2^2+y^2-2y+1=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x+2)^2+(y-1)^2=4$

Trata-se de uma circunferência de centro $(-2,1)$ e raio 2, ou seja, C_1.

Opção: **(A)**

2.

2.1 Equação da reta *BC*: $3y-2x+6=0 \Leftrightarrow 3y=2x-6 \Leftrightarrow y=\frac{2}{3}x-2$

$C(0,c)$ e pertence à reta *BC*.

Então, $c=-2$. As coordenadas do ponto *C* são $(0,-2)$.

2.2 Equação reduzida da reta *BC*: $y=\frac{2}{3}x-2$. O declive é igual a $\frac{2}{3}$.

Então, $\vec{u}=(3,2)$ é um vetor diretor da reta e $B(3,0)$ é um ponto da reta.

Uma equação vetorial da reta *BC* é: $(x,y)=(3,0)+k(3,2),\ k\in\mathbb{R}$

2.3 Como a circunferência de centro *B* é tangente ao eixo *Oy*, o raio é igual a 3.

Equação da circunferência de centro *B* e raio 3: $(x-3)^2+y^2=9$

Equação da circunferência de centro *A* e raio 1: $(x-3)^2+(y-2)^2=1$

Equação reduzida da reta *BC*: $y=\frac{2}{3}x-2$

A região colorida é constituída pelos pontos $(x,\ y)$ do plano tais que:

$$(x-3)^2+y^2\le 9 \quad\wedge\quad (x-3)^2+(y-2)^2\ge 1 \quad\wedge\quad y\ge\frac{2}{3}x-2$$

2.4 A reta paralela a *BC* e que passa pelo ponto *A* tem o mesmo declive de *BC*.

$y=\frac{2}{3}x+b$

Como a reta passa por $A(3,2)$, então: $2=\frac{2}{3}\times 3+b \Leftrightarrow 0=b$

Logo, a equação reduzida é $y=\frac{2}{3}x$.

2.5 Seja A_c a área da região colorida.

$$A_c = \frac{\pi\times 3^2}{2} - \pi\times 1^2 = \frac{9}{2}\pi - \pi = \frac{7}{2}\pi \approx 11$$

A medida da área é, aproximadamente, igual a 11.

Opção: **(D)**

3.

3.1 $A(-1,6)$, $B(2,5)$, $C\left(\frac{2}{3},-4\right)$ e $P\left(1-4m\,,\,9m^2-9\right)$, $m\in\mathbb{R}$

$$\overrightarrow{AB} = B - A = (2,\,5)-(-1,\,6) = (3,\,-1)$$

$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AB} = P - C = (3,\,-1)$$

$$\left(1-4m-\frac{2}{3}\,,\,9m^2-9+4\right)=(3,-1) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}-4m,\,9m^2-5\right)=(3,-1) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}\frac{1}{3}-4m=3\\ 9m^2-5=-1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}1-12m=9\\ 9m^2=4\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-\frac{8}{12}\\ m^2=\frac{4}{9}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}m=-\frac{2}{3}\\ m=\frac{2}{3} \;\vee\; m=-\frac{2}{3}\end{cases}$$

Conclui-se que $m=-\frac{2}{3}$.

3.2 $A(-1,6)$ e $B(2,5)$. Então, $\overrightarrow{AB}=(3,\,-1)$. O declive de AB é $-\frac{1}{3}$.

A: $(x,y)=(1,7)+k(2,-6)$, $k\in\mathbb{R}$ define uma reta com declive –3.

C: $(x,y)=(2,5)+k(-1,\,6)$, $k\in\mathbb{R}$ define uma reta com declive –6.

D: $(x,y)=(-1,\,6)+k(3,-1)$, $k\in\mathbb{R}$ define a reta AB.

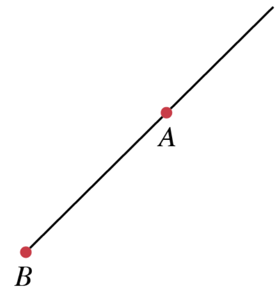
B: $(x,y)=(9,\,2)+k(-6,2)$, $k\in\mathbb{R}$ define uma reta com declive $-\frac{2}{6}=-\frac{1}{3}$.
Nenhum dos pontos A e B pertencem a esta reta, pelo que é estritamente paralela a AB.

Opção: **(B)**

3.3 $A(-1,6)$, $B(2,5)$. Então, $\overrightarrow{BA}=(-3,1)$.

$(x,y)=(2,5)+k(-3,1)$, $k \in \mathbb{R}_0^+$

Opção: **(C)**



4.

4.1 $x=3 \quad \wedge \quad z=6 \quad \wedge \quad 0 \leq y \leq 3$

Opção: **(D)**

4.2 Seja $P(x,y,z)$. Pretende-se que $\overline{AP}=\overline{GP}$.

$$(x-3)^2+y^2+z^2=x^2+(y-3)^2+(z-6)^2 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow x^2-6x+9+y^2+z^2=x^2+y^2-6y+9+z^2-12z+36$$
$$\Leftrightarrow -6x+6y+12z=36$$
$$\Leftrightarrow -x+y+2z=6$$

4.3 $B(3,3,0)$ e $G(0,3,6)$

$M\left(\frac{3}{2},3,3\right)$ e $\overrightarrow{AM}=M-A=\left(\frac{3}{2},3,3\right)-(3,0,0)=\left(-\frac{3}{2},3,3\right)$

Reta *AM*: $(x,y,z)=(3,0,0)+k\left(-\frac{3}{2},3,3\right)$, $k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow (x,y,z)=\left(3-\frac{3}{2}k,3k,3k\right)$, $k \in \mathbb{R}$

A face [*EFGH*] está contida no plano de equação $z=6$.

$3k=6 \Leftrightarrow k=2$. Então, o ponto de interseção é $(0,6,6)$.

5.1 $D'_f=\left[-3{,}5\ ;\ 2\sqrt{5}\right]$

5.2 $f(-\pi)+f\left(-\frac{5}{2}\right)-f\left(\frac{9}{2}\right)=-2+2\sqrt{5}-(-1)=-2+2\sqrt{5}+1=2\sqrt{5}-1$

Opção: **(C)**

5.3 $f(1)<0 \quad \wedge \quad f(4)<0$

O produto de dois números negativos é positivo, logo $f(1)\times f(4)>0$

A afirmação $f(1)\times f(4)<0$ é **Falsa**.

5.4

x	$-\pi$		-3		-1		3		$\frac{9}{2}$
$f(x)$	-2	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$-$	-1

$f(x)\geq 0 \;\Leftrightarrow\; -3\leq x\leq 1 \;\vee\; x=3 \;\Leftrightarrow\; -3\leq x\leq 1 \;\vee\; x=3$

$x\in[-3,1]\cup\{3\}$

5.5 Máximos: 0 e $2\sqrt{5}$

Mínimos: $-3,5$; -2 ; -1

Crescente: $\left[-\pi\,,-\frac{5}{2}\right]$ e em $\left[\frac{1}{2}\,,3\right]$

Decrescente: $\left[-\frac{5}{2}\,,\frac{1}{2}\right]$ e em $\left[3,\frac{9}{2}\right]$

5.6 $f(x)=k$ tem duas e só duas soluções quando $k\in\left]-3,5\,;\,-2\right[\cup\left]0\,,2\sqrt{5}\right[$.

5.7 $D_g=\left[0\,,\frac{9}{2}+\pi\right]$; $D'_g=\left[-7\,,4\sqrt{5}\right]$

6. $g(x)=3x-12kx+5 \;\Leftrightarrow\; g(x)=(3-12k)x+5$

A função g é decrescente quando $3-12k<0$.

$3-12k<0 \;\Leftrightarrow\; k>\frac{1}{4} \;\Leftrightarrow\; k\in\left]\frac{1}{4}\,,+\infty\right[$