

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 6

2.º Período

06/02/19

Duração: 90 minutos

Nome:

N.º:

Classificação:

--	--	--

O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Caderno 1: 45 minutos (é permitido o uso de calculadora)

1. Algumas pessoas que têm conta no Facebook são loucas por ananás.

A maior parte dessas pessoas estão inseridas em dois grupos, «Amantes do ananás» (A) e «Sem ananás eu morro» (B).



Sabe-se que:

- 75% dos loucos por ananás pertencem ao grupo A;
- 15% dos loucos por ananás pertencem a ambos os grupos;
- 80% dos loucos por ananás que não pertencem ao grupo A pertencem ao grupo B.

1.1. Escolhe-se, ao acaso, uma pessoa com conta no Facebook e que é louca por ananás.

Determine a probabilidade de ela pertencer ao grupo A sabendo que não pertence ao grupo B.

1.2. 15 elementos dos loucos por ananás e 5 elementos amantes de banana encontraram-se no evento «Bananás».

Vão ser escolhidos 3 elementos de um dos grupos para organizar um jantar de confraternização.

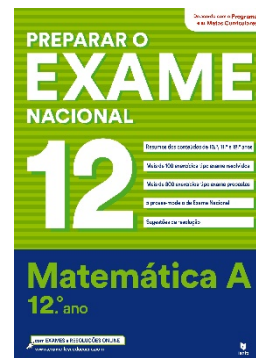
Qual é a probabilidade, em percentagem e com arredondamento às unidades, de os três elementos pertencerem todos ao grupo dos amantes de banana?

(A) 1%

(B) 2%

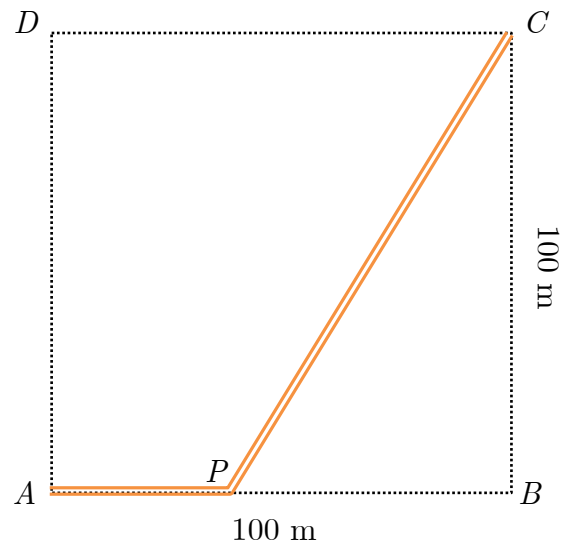
(C) 5%

(D) 6%



2. A Câmara Municipal de uma localidade pretende construir um passadiço em duas partes numa zona quadrangular (quadrado $[ABCD]$ da figura de lado 100 metros) com os seguintes critérios:

- uma parte do passadiço deverá ser construído na estrada (lado $[AB]$ do quadrado) e custa 12 euros por metro;
- a outra parte do passadiço deverá ser construído no areal (segmento $[PC]$ no interior do quadrado) e custa 20 euros por metro.



2.1. Designando \overline{PB} por x , mostre que a função f que dá o custo de construção do passadiço é dada por

$$f(x) = 1200 - 12x + 20\sqrt{x^2 + 10000}, \quad x \in]0, 100[.$$

2.2. Usando processos analíticos, determine, em metros, o valor de x que minimiza o custo de construção do passadiço.

2.3. O teorema de Lagrange, aplicado à função f em $]0, 75[$, permite concluir que:

- (A) $\forall x \in]0, 75[, f'(x) = -\frac{\sqrt{130}}{5}$ (B) $\exists x \in]0, 75[: f'(x) = -\frac{\sqrt{130}}{5}$
(C) $\forall x \in]0, 75[, f'(x) = -\frac{16}{3}$ (D) $\exists x \in]0, 75[: f'(x) = -\frac{16}{3}$

3. Considere a função, de domínio $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, definida por $g(x) = \frac{\cos(3x)}{x+1}$.

3.1. Em qual das opções a seguir está uma equação vetorial da reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa 0?

- (A) $(x, y) = (0, 1) + k(-2, 2), k \in \mathbb{R}$ (B) $(x, y) = (0, 1) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$
(C) $(x, y) = (0, 3) + k(-2, 2), k \in \mathbb{R}$ (D) $(x, y) = (0, 3) + k(1, 1), k \in \mathbb{R}$

3.2. Recorrendo à calculadora gráfica, determine um valor, aproximado às décimas, do comprimento do segmento $[AB]$, em que:

- A é o ponto de interseção do gráfico de g com a reta de equação $y = 0,6$;
- B é o ponto do gráfico de g cuja ordenada é mínima.

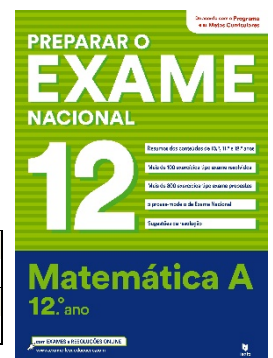
Reproduza, na folha de respostas, o gráfico, ou gráficos, visualizado(s) na calculadora, devidamente identificado(s), incluindo o referencial.

Nas coordenadas dos vértices em que é necessário fazer arredondamentos, utilize três casas decimais.

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.1.	1.2.	2.1.	2.2.	2.3.	3.1.	3.2.	
17	8	16	21	8	8	17	95



Formulário

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$(u^n)' = nu^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' e^u$$

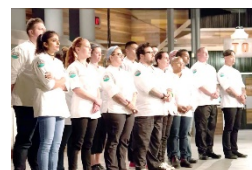
$$(a^u)' = u' a^u \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Caderno 2: 45 minutos
(não é permitido o uso de calculadora)

4. Uma cadeia de restaurantes tem, nos seus quadros, 10 *chefs* e 21 *sous chefs*. Para um concurso, vão ser seleccionados 14 deles, sendo que tem de haver um mínimo de 3 *chefs* e um mínimo de 10 *sous chefs* nessa seleção.



De quantas maneiras pode ser feita essa seleção?

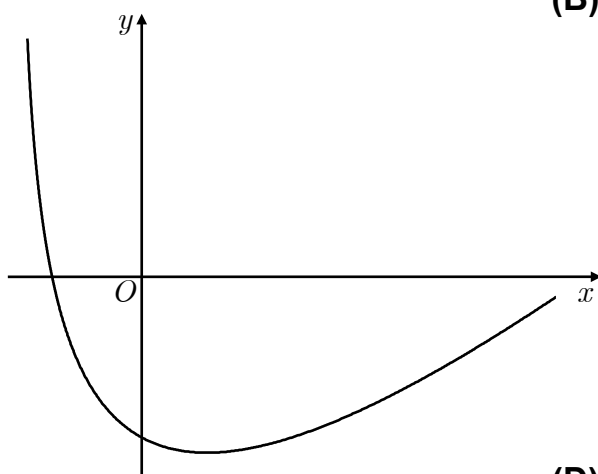
- (A) ${}^{10}C_4 \times {}^{21}C_{10}$ (B) ${}^{11}C_4 \times {}^{21}C_{10}$ (C) ${}^{11}C_4 + {}^{21}C_{10}$ (D) ${}^{10}C_4 + {}^{21}C_{10}$

5. Seja h uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{-5\}$ e tal que:

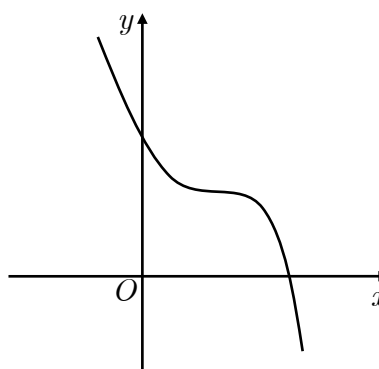
- $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{2 - x} = 0$;
- $h''(x) = \frac{7}{(x+5)^2}$.

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função h ?

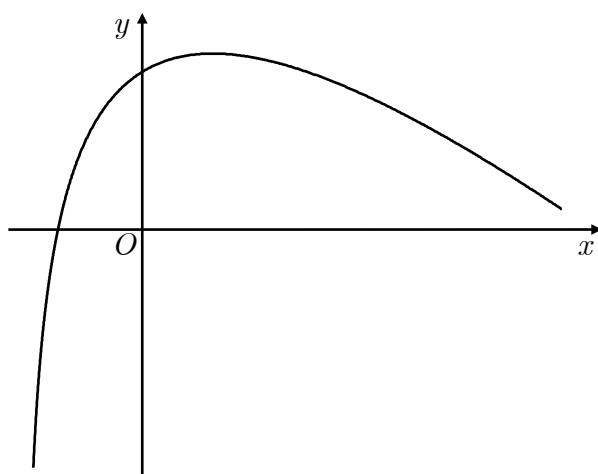
(A)



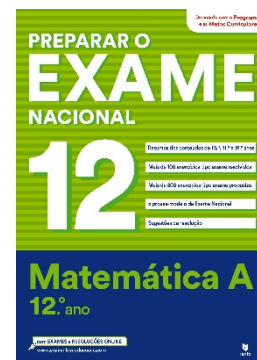
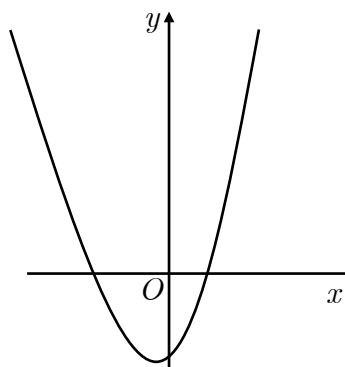
(B)



(C)



(D)



6. Seja f uma função duas vezes diferenciável em \mathbb{R} e tal que $f'(x) = (x^3 + 8)^4$.
 Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
 - o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
 - a(s) abscissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f .

7. Considere a função, de domínio $]-\infty, 1 + \pi[\setminus \{0\}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{x}\right) - 4 & \text{se } x \leq 1 \\ \frac{2x^2 - 2}{\cos\left(1 - \frac{\pi}{2} - x\right)} & \text{se } 1 < x < 1 + \pi \end{cases}.$$

- 7.1. Mostre que a função f é contínua no ponto 1.
- 7.2. Estude o gráfico de f quanto à existência de assíntotas paralelas ao eixo Ox e indique, se existir(em), a(s) sua(s) equação(ões).

8. Considere a função, de domínio $]\pi, 4\pi[\setminus \{3\pi\}$, definida por $g(x) = \frac{\operatorname{sen}x + \cos\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)\cos(2x) + 2\cos\left(\frac{x}{2}\right)\operatorname{sen}^2x}$.

- 8.1. Mostre que $g(x) = 2\operatorname{sen}\left(\frac{x}{2}\right) + 1$.
- 8.2. Determine os zeros de g .

FIM DO TESTE

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
4.	5.	6.	7.1.	7.2.	8.1.	8.2.	
8	8	21	17	17	17	17	105
TOTAL (Caderno 1 + Caderno 2)							200

