Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2022/2023)

5.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 4

3.º Período **29/05/2023** **Duração: 100 minutos**

Nome: ______________________________ **N.º:**

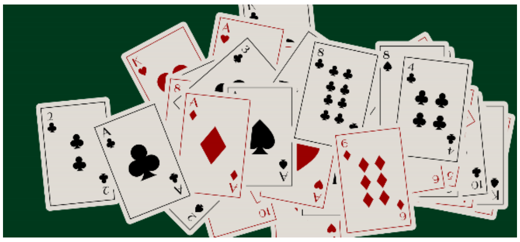
Classificação: ☐☐,☐ **O professor:**

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

---

1. Considere um baralho de cartas incompleto, constituído por 44 cartas de quatro naipes: espadas, paus, copas e ouros.



Extraem-se ao acaso, sucessivamente e sem reposição, três cartas desse baralho.

Sejam E_1, E_2 e X os acontecimentos seguintes.

E_1: «A primeira carta extraída é do naipe de espadas.»

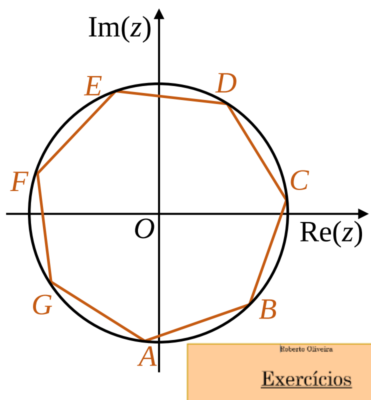
E_2: «A segunda carta extraída é do naipe de espadas.»

X: «As cartas não são todas de espadas.»

Sabe-se que $P\left(X \mid (E_1 \cap E_2)\right) = \frac{6}{7}$.

Determine, justificando, o número de cartas de espadas que existem no baralho incompleto.

2. A figura ao lado representa, no plano complexo, o heptágono $[ABCDEFG]$ inscrito numa circunferência centrada na origem e de raio 2.



Os vértices do heptágono são os afixos das raízes de índice n de um certo número complexo z.

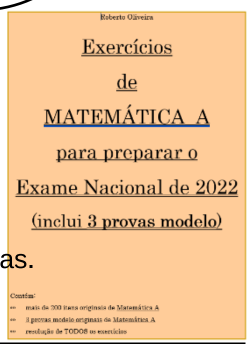
O vértice B é o afixo de um número complexo de argumento $-\frac{\pi}{4}$.

2.1. Qual dos seguintes números complexos tem por afixo o vértice F ?

(A) $\sqrt[7]{2}\, e^{i\frac{25\pi}{28}}$ **(B)** $\sqrt[7]{2}\, e^{i\frac{6\pi}{7}}$

(C) $2e^{i\frac{25\pi}{28}}$ **(D)** $2e^{i\frac{6\pi}{7}}$

2.2. Determine, sem usar a calculadora, o número z na forma trigonométrica.



3. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $w = \frac{320i}{2-i} + 128i^{59}$.

Mostre, sem recorrer à calculadora, que w é um número real e determine as suas raízes cúbicas.

Apresente essas raízes na forma algébrica.

4. Dado um número real positivo a, seja $z = a - a\,i$ um número complexo.

Qual dos seguintes pode ser o número complexo que é o simétrico do conjugado de z ?

(A) $\frac{a}{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$ **(B)** $\frac{a}{2}e^{-i\frac{5\pi}{4}}$ **(C)** $e^{i\frac{3\pi}{4}}$ **(D)** $e^{-i\frac{3\pi}{4}}$

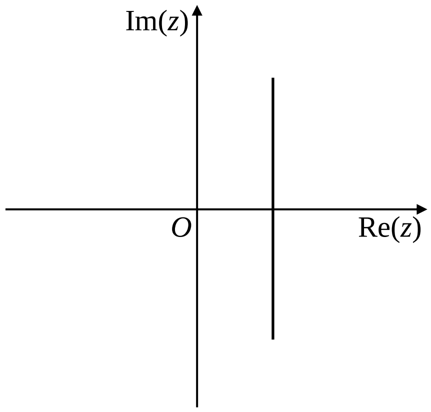
5. Em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, considere o número $z = (1 + 2i\operatorname{sen}\theta)i\cos\theta$, com $\theta \in \left]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right[$.

Determine, caso exista(m), o(s) valor(es) de θ para o(s) qual(ais) z é um imaginário puro.

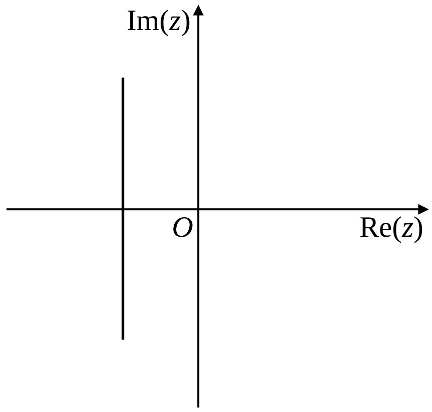
6. Considere, em $\mathbb{C}$, conjunto dos números complexos, a condição $|z| \le 4 \ \wedge \ \operatorname{Re}(z-2) = 0$.

Em qual das opções seguintes está representado, no plano complexo, o conjunto de pontos definido por esta condição?

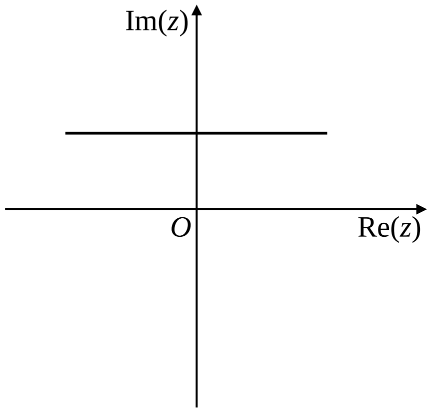
(A)



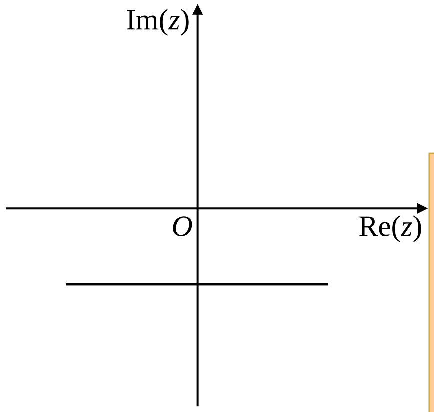
(B)



(C)



(D)



7. Seja h uma função, de domínio $]-\infty, 2[$, cuja derivada, de domínio $]-\infty, 2[$, é definida por $h'(x) = \ln^3(4-2x)$.
Estude, sem recorrer à calculadora, a função h quanto ao sentido das concavidades do seu gráfico e quanto à existência de pontos de inflexão.

Na sua resposta, apresente, se existirem:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de h tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de h tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de h.

8. Seja $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ uma função tal que:

- $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[f(x)-x\right]=0$;
- $f'(x)>0$, para qualquer $x\in\left]0,+\infty\right[$;
- $f''(-2)>0$.

Nenhum dos gráficos a seguir apresentados é o gráfico da função f.

Gráfico **A**

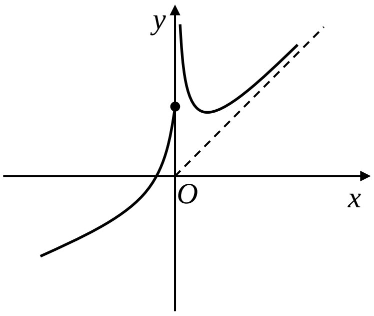


Gráfico **B**

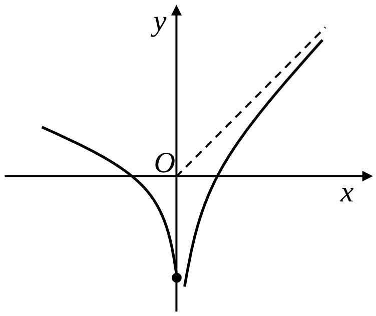
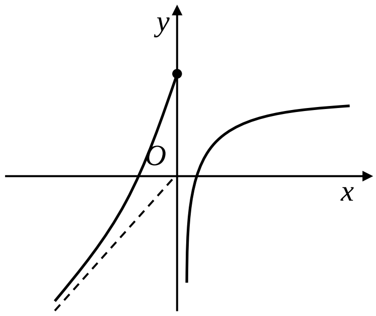


Gráfico **C**



Elabore uma composição na qual apresente, para cada um dos gráficos, uma razão pela qual esse gráfico não pode ser o gráfico da função f.

9. Considere a função g, de domínio $\left[0,\pi\right]$, definida por $g(x)=\operatorname{sen}(2x)\cos x+kx^2$, sendo k um número real.

9.1. Sabe-se que a reta tangente ao gráfico de g no ponto de abcissa $\frac{\pi}{4}$ é horizontal.
Qual é o valor de k ?

(A) $\frac{\sqrt{2}}{2\pi}$ **(B)** $\frac{\sqrt{2}}{\pi}$ **(C)** $\sqrt{2}\left(2+\pi\right)$ **(D)** $\sqrt{2}\left(1+\pi\right)$

9.2. Nesta alínea, considere $k=0$.

Considere o gráfico da função h, de domínio $\left[0,\pi\right]$, que se obtém fazendo uma dilatação horizontal ao gráfico de g, de coeficiente 2, seguida de uma translação de vetor $\left(0,-\frac{1}{2}\right)$.
Os gráficos de g e h intersetam-se em apenas dois pontos.
Determine, recorrendo às capacidades gráficas da calculadora, as abcissas desses pontos.
Na sua resposta:
– apresente uma equação que lhe permita resolver o problema;
– reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) visualizado(s) na calculadora que lhe permite(m) resolver a equação;
– apresente as abcissas pedidas arredondadas às centésimas.

10. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da equação

$$\frac{\log_3(10x+3)}{2}=\log_3(5x)$$

11. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\begin{cases} 2+x+\ln\left(e^{-x}+1\right) & \text{se} \quad x<0 \\ \dfrac{e^x-1}{\left(x^2+x\right)\ln 2} & \text{se} \quad x>0 \end{cases}$.

Resolva os itens **11.1.** e **11.2.** sem recorrer à calculadora.

11.1. Verifique se existe $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$.

11.2. Estude a função g quanto à existência de assíntota horizontal ao seu gráfico quando $x\to-\infty$ e, caso exista, escreva a sua equação.

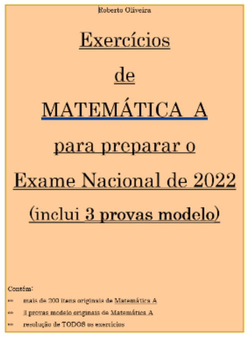
11.3. Em $]-\infty,0[$, o gráfico de g e a bissetriz dos quadrantes ímpares:

(A) não se intersetam;

(B) intersetam-se no ponto de abcissa $\ln\left(1-e^{-2}\right)$;

(C) intersetam-se no ponto de abcissa $e^{-2}-1$;

(D) intersetam-se no ponto de abcissa $1+\ln 2$.



12. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=\dfrac{e^{2x}}{x}$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o contradomínio da função f.

FIM

COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.1.**	**11.2.**	**11.3.**	**12.**	
15	8	12	15	8	15	8	15	13	8	15	15	15	15	8	15	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a\,\cos b+\operatorname{sen} b\,\cos a$

$\cos(a+b)=\cos a\,\cos b-\operatorname{sen} a\,\operatorname{sen} b$

Complexos

$\left(\rho e^{i\theta}\right)^n=\rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}}=\sqrt[n]{\rho}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}} \quad (k\in\{0,\ldots,n-1\} \text{ e } n\in\mathbb{N})$

Limites notáveis

$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln x}{x}=0$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$

Regras de derivação

$(u+v)'=u'+v'$

$(uv)'=u'\,v+u\,v'$

$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

$(u^n)'=n\,u^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$

$(\operatorname{sen} u)'=u'\,\cos u$

$(\cos u)'=-u'\,\operatorname{sen} u$

$(\operatorname{tg} u)'=\dfrac{u'}{\cos^2 u}$

$(e^u)'=u'\,e^u$

$(a^u)'=u'\,a^u\,\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$

$(\ln u)'=\dfrac{u'}{u}$

$(\log_a u)'=\dfrac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$