www.esffranco.edu.pt
(2022/2023)

3.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 4

2.º Período | 06/02/2023 | Duração: 90 minutos

Nome: ______________________ N.º:

Classificação: ___ , ___ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Numa certa linha do triângulo de Pascal, sabe-se que o produto dos dois primeiros elementos com os dois últimos elementos é igual a 144.

Qual é o maior elemento da linha seguinte?

(A) 1287 **(B)** 924 **(C)** 2002 **(D)** 1716

2. O parque de campismo de Dujal dispõe de diversas comodidades para os seus clientes, sendo duas delas um bar e uma piscina.

2.1. Num certo dia, estão n pessoas a usufruir da piscina, 8 dos quais portuguesas ($n>8$).

Suponha que todas as n pessoas vão entrar na piscina, uma de cada vez.

De quantas maneiras pode isso acontecer, se 4 dos portugueses forem os primeiros a entrar na piscina e os outros 4 portugueses forem os últimos?

(A) ${}^{n-8}C_4 \times (n-4)!$ **(B)** ${}^{8}C_4 \times 4! \times (n-8)!$

(C) ${}^{n-8}A_4 \times (n-4)!$ **(D)** ${}^{8}A_4 \times 4! \times (n-8)!$

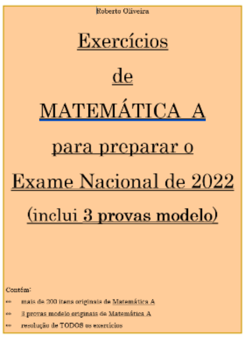
2.2. Numa determinada altura do ano, verificou-se que, no parque de campismo de Dujal:

- 60% dos clientes eram estrangeiros;
- 30% dos clientes eram estrangeiros e não usufruíram da piscina;
- dos clientes que não eram estrangeiros, 80% não usufruíram da piscina.

Escolheu-se, ao acaso, um cliente que usufruiu da piscina.

Determine a probabilidade de esse cliente ser estrangeiro.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.



Adaptado do Exame Nacional de MACS, 2.ª fase de 2022

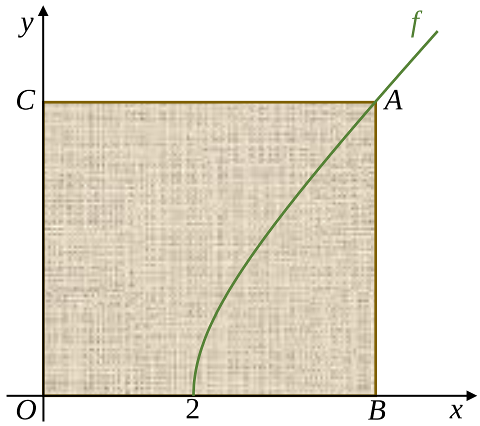
3. Um ponto P desloca-se sobre uma reta numérica de tal forma que a sua abcissa, em metros, é dada, após t segundos, por:

$$x(t) = 2t^3 + 3t^2 - 36t + 90$$

Sem recorrer à calculadora, calcule, em metros, a abcissa mínima do ponto P.

4. Considere, no referencial o.n. xOy da figura:

- a função f, de domínio $[2, +\infty[$, definida por $f(x) = \sqrt{x^2 - 4}$;
- o retângulo $[ABOC]$, onde A é um ponto do gráfico de f de abcissa superior a 2, B é um ponto do eixo Ox com a mesma abcissa de A e C é um ponto do eixo Oy com a mesma ordenada de A.



Seja g a função que dá a área do retângulo $[ABOC]$, em função da abcissa x de A, $x > 2$.

Pretende-se determinar o(s) valor(s) de x de modo que a reta tangente ao gráfico de g seja paralela à reta de equação $y = 7x - \frac{1}{2}$.

Qual das equações a seguir traduz este problema?

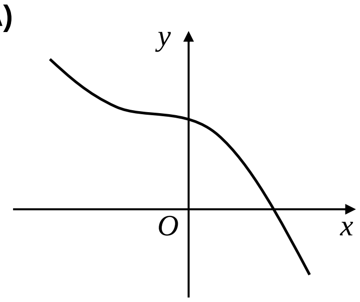
(A) $\frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-4}} + \frac{1}{2} = 0$ **(B)** $\frac{2x^2-4}{\sqrt{x^2-4}} - 7 = 0$

(C) $\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2-4} + \frac{1}{2} = 0$ **(D)** $\frac{\sqrt{x^2-4}}{2x^2-4} - 7 = 0$

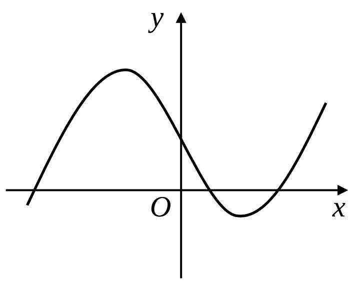
5. Considere a função h, duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}$, e tal que h' é decrescente em $\mathbb{R}$.

Em qual das seguintes opções pode estar representada parte do gráfico da função h?

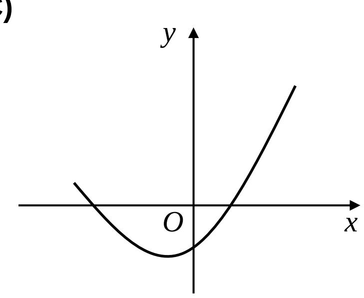
(A)



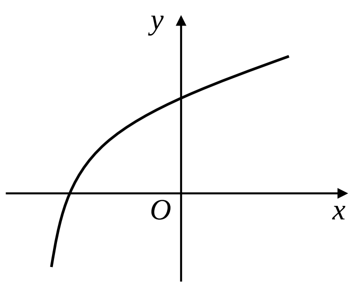
(B)



(C)



(D)



6. Seja f uma função duas vezes diferenciável em $\mathbb{R}\setminus\{3\}$ e tal que $f\,'(x)=\frac{x^3}{3-x}$.

Estude a função f quanto ao sentido das concavidades e quanto à existência de pontos de inflexão do seu gráfico, indicando:

- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para baixo;
- o(s) intervalo(s) onde o gráfico de f tem a concavidade voltada para cima;
- a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de inflexão do gráfico de f, se existirem.

7. Considere o número real a tal que $\operatorname{sen} a=\frac{2}{5} \wedge a\in\left]0,\frac{\pi}{2}\right[$.

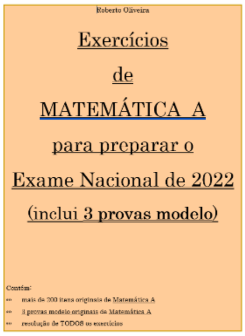
Qual é o valor de $\operatorname{sen}\left(a+\frac{4\pi}{3}\right)$?

(A) $-\frac{3\sqrt{7}+2}{10}$ **(B)** $\frac{3\sqrt{7}+2}{10}$ **(C)** $4\sqrt{3}-6$ **(D)** $6-4\sqrt{3}$

8. De um certo número real $\alpha\in[\pi,3\pi]$, sabe-se que $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=3$.

Determine, sem recorrer à calculadora, o valor de $\cos\left(\alpha+\frac{3\pi}{2}\right)$.

9. Resolva, em $\mathbb{R}$, a equação $\sqrt{3}\cos x-\operatorname{sen} x=2\cos\frac{\pi}{8}$.



10. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x)=\begin{cases}\frac{\operatorname{sen}(3x+3)}{5x+5} & \text{se } x<-1\\ \cos(\pi x)+2x & \text{se } x\geq-1\end{cases}$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

10.1. Estude a continuidade da função f em $x=-1$.

10.2. Estude a função f quanto à existência de assíntota horizontal do seu gráfico em $-\infty$, indicando, se existir, a sua equação.

10.3. Determine a(s) abcissa(s) do(s) ponto(s) de interseção entre o gráfico da função f e a reta de equação $y=\frac{4x+\sqrt{2}}{2}$, pertencentes ao intervalo $[-1,0]$.

11. São dadas as funções f e g, de domínio $\mathbb{R}\setminus\{0\}$, definidas respetivamente por $f(x)=\frac{1+x}{x}$ e $g(x)=\operatorname{sen} x$.

Sabe-se que a equação $(f\circ g)(x)=2x$ tem exatamente duas soluções em $]0,3]$.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, essas soluções, arredondada às centésimas.

Na sua resposta, deve:

- apresentar uma expressão simplificada da função $f\circ g$;
- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar, devidamente identificado(s);
- assinalar os pontos relevantes para responder à questão colocada.

12. Na figura junta estão representados, em referencial o.n. xOy, uma circunferência centrada na origem e o triângulo $[ABO]$.

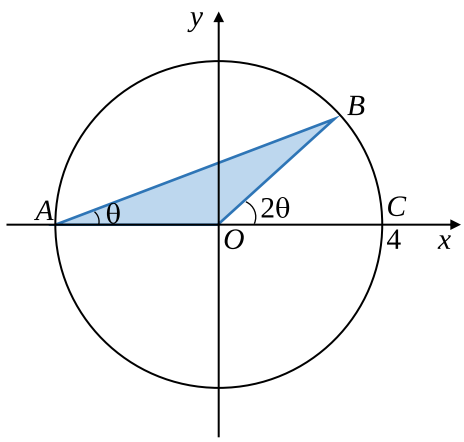
Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(-4,0)$;
- o segmento de reta $[BO]$ é um raio da circunferência.

Considere que $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ é o ângulo de amplitude BAO e 2θ o ângulo de amplitude BOC, sendo C um ponto do semieixo positivo.

Mostre que a área do triângulo $[ABO]$ é dada pela expressão:

$16 \operatorname{sen}\theta \cos\theta$

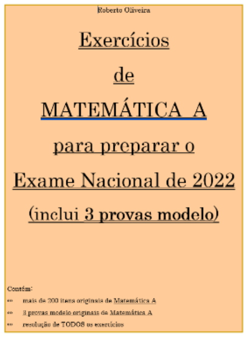


13. Considere a função h, de domínio $\mathbb{R}^+$, definida por $h(x) = (x+2)^2 \cos\left(\frac{\pi}{2x+4} - \frac{\pi}{2}\right)$.

Sabe-se que o gráfico de h admite uma assíntota oblíqua.

Determine o seu declive.

FIM



COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.1.**	**2.2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.**	**9.**	**10.1.**	**10.2.**	**10.3.**	**11.**	**12.**	**13.**	
8	8	13	13	8	8	17	8	17	14	17	13	14	14	14	14	**200**

Formulário

Trigonometria

$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$

$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

Limites notáveis

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1$

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'v + uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' \quad (n \in \mathbb{R})$