www.esffranco.edu.pt

(2022/2023)

2.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 4

1.º Período

09/12/2022

Duração: 90 minutos

Nome: ______________________________ N.º:

Classificação: ____ , __ O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Pode resolver o item **1.2.** <u>ou</u> o item **5.1.**

1. Num saco existem $3n$ bolas verdes e $2n$ bolas azuis, indistinguíveis ao tato ($n \in \mathbb{N}$).

1.1. Nas duas alíneas seguintes, considere $n = 2$.

Suponha que as bolas verdes estão numeradas de 1 a 6 e as bolas azuis estão numeradas de 7 a 10.

1.1.1. Extraem-se, ao acaso, todas as bolas do saco, uma de cada vez.

Quantas maneiras existem de extraírem essas bolas se as duas primeiras e as duas últimas forem verdes?

(A) 2160 **(B)** 4320 **(C)** 259 200 **(D)** 518 400

1.1.2. Extraem-se agora, ao acaso, três bolas do saco.

Considere os acontecimentos seguintes.

V : «As três bolas são todas verdes.»

R : «As três bolas têm todas um número primo.»

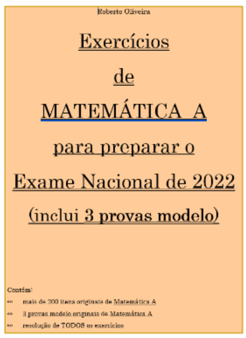
Averigue se os acontecimentos V e R são independentes.

1.2. Considere agora que se extraem, ao acaso, duas bolas do saco.

Sabendo que a probabilidade de apenas uma bola ser verde é igual a $\frac{13}{27}$, determine n.

Para resolver este problema, percorra as seguintes etapas:

- equacione o problema;
- resolva a equação.



2. **2.1.** Seja Ω, conjunto finito, o espaço amostral associado a uma dada experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos $(A \subset \Omega$ e $B \subset \Omega)$ tais que $P(\overline{B}) = 6P(A \cap B)$.

Mostre que $P(A \cap B) = \dfrac{P(A)+P(\overline{A} \cap \overline{B})}{7}$.

2.2. Sobre os pacientes num consultório médico, concluiu-se que:

- 72% são mulheres;
- 60% vêm de automóvel;
- 20% dos que vêm de automóvel, são homens.

Escolhe-se, ao acaso, um paciente desse consultório.

Determine a probabilidade de ele ser uma mulher que não vem de automóvel.

Apresente o resultado na forma de percentagem, arredondado às unidades.

Nota: Se o desejar, utilize a igualdade referida em **2.1.**. Neste caso, deverá começar por caracterizar claramente os acontecimentos A e B, no contexto da situação apresentada.

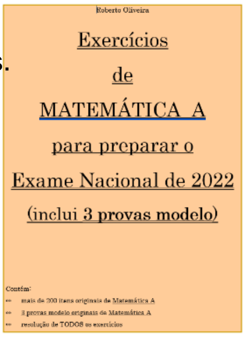
3. Considere a função f, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sqrt{16x^2+17}}{5x+1} & \text{se } x < -2 \\ -1 & \text{se } x = -2 \\ \dfrac{x^3-15x-22}{3x+6} & \text{se } x > -2 \end{cases}$.

Sem usar a calculadora (exceto para cálculos numéricos), resolva as alíneas **3.1.** e **3.3.**.

3.1. Mostre que f é contínua no ponto de abcissa -2.

3.2. O Teorema de Bolzano-Cauchy permite-nos afirmar que a equação $f(x) = 3$ tem, pelo menos, uma solução no intervalo:

(A) $]-2, 4[$ **(B)** $]-2, 0[$ **(C)** $]4, 7[$ **(D)** $]7, 10[$

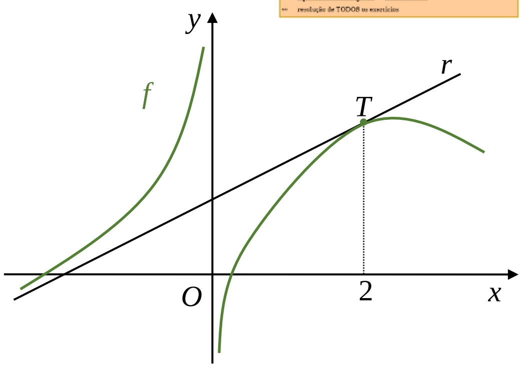


3.3. Estude o gráfico de f quanto à existência de assíntotas paralelas aos eixos coordenados.

4. Considere, na figura ao lado, o gráfico da função f, diferenciável em $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, e a reta r, definida por $y = \frac{1}{2}x + 1$.

Sabe-se que a reta r é a assíntota do gráfico de f quando $x \to -\infty$ e é tangente ao gráfico de f no ponto T, de abcissa 2.

Qual é o valor de $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{f(x)-2}{x^2-4} \times \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x}$?



(A) $-\frac{1}{4}$ **(B)** $\frac{1}{8}$

(C) $-\frac{1}{32}$ **(D)** $\frac{1}{16}$

Pode resolver o item **5.1.** ou o item **1.2.**

5. Seja f a função, diferenciável em $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=5-\sqrt{9x}$.

5.1. Mostre, usando a definição de derivada num ponto, que $f'(1)=-\frac{3}{2}$.

5.2. Em qual das opções a seguir está uma equação da reta tangente ao gráfico de f no ponto de abcissa 1?

(A) $3x-2y=7$ **(B)** $3x+2y=7$ **(C)** $y=-\frac{3}{2}x+14$ **(D)** $y=-\frac{3}{2}x-14$

6. Os lucros de um certo banco, em milhões de euros, são dados, t meses após o início de 2022, pela função definida por

$l(t)=\frac{1}{4}t^3+\frac{1}{3}t^2+t+14$, com $0\leq t\leq 9$.

6.1. Qual foi o aumento médio dos lucros do banco, em milhões de euros por mês, nos primeiros seis meses de 2022?

(A) 28 **(B)** 24 **(C)** 14 **(D)** 12

6.2. Calcule, analiticamente, $l'(9)$.

Interprete o resultado no contexto do problema.

7. Seja g a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $g(x)=\left(-2x^2+x-1\right)^3$.

7.1. Estude a função g quanto à monotonia e à existência de extremos relativos.

Na sua resposta, deve apresentar:

- o(s) intervalo(s) em que a função g é crescente;
- o(s) intervalo(s) em que a função g é decrescente;
- os valores de x para os quais a função g tem extremos relativos, caso existam.

7.2. Considere agora a função h, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $h(x)=g(x)+4$.

Sabe-se que a função h tem dois zeros.

Recorrendo à calculadora gráfica, determine a distância entre as suas abcissas.

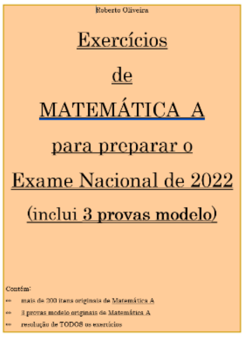
Na sua resposta, deve:

- reproduzir, num referencial, o gráfico da função ou os gráficos das funções que tiver necessidade de visualizar na calculadora, devidamente identificados;
- indicar as coordenadas relevantes dos zeros de h com, pelo menos, duas casas decimais;
- determinar o valor pedido, arredondado às décimas.

8. Considere a função f, diferenciável em $\mathbb{R}^+$, definida por $f(x)=x^2+x+\frac{1}{x}$.

Mostre que, no intervalo $\left]\frac{1}{2},1\right[$, existe um ponto do gráfico de f cuja reta tangente é horizontal.

FIM



COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.1.1.	**1.1.2.**	**1.2.**	**2.1.**	**2.2.**	**3.1.**	**3.2.**	**3.3.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**7.1.**	**7.2.**	**8.**	
8	13	16	16	16	16	8	19	8	16	8	8	13	19	16	16	**216**

Formulário

Regras de derivação

$(u+v)' = u' + v'$

$(uv)' = u'\,v + u\,v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(u^n)' = n\,u^{n-1}u' \quad (n \in \mathbb{R})$