www.esffranco.edu.pt
(2022/2023)

4.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 12.º 3

2.º Período 23/03/2023 Duração: 100 minutos

Nome: N.º:

Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

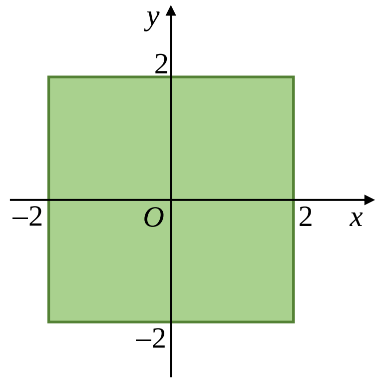
---

1. Na figura ao lado, está representada, a sombreado, num referencial o.n. xOy, a região do plano cartesiano definida pela condição $-2 \leq x \leq 2 \ \wedge \ -2 \leq y \leq 2$.

Considere todos os pontos que pertencem a essa região e cujas coordenadas são números inteiros.

Escolhe-se, ao acaso, dois desses pontos.

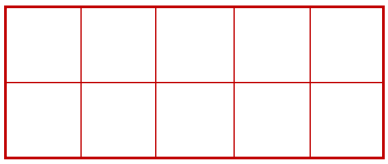
Qual é a probabilidade de esses pontos serem os vértices do quadrado?



(A) $\frac{1}{100}$ **(B)** $\frac{1}{50}$

(C) $\frac{1}{75}$ **(D)** $\frac{1}{25}$

2. No balcão de uma geladaria, existe um recipiente com 10 compartimentos iguais para colocar gelados, um sabor em cada um: cinco na fila da frente e cinco na fila de trás.



Três dos compartimentos são para colocar os sabores de chocolate, dois deles são para colocar os sabores a café e os restantes cinco compartimentos são para cinco sabores de fruta (ananás, banana, morango, ameixa e cereja).

Os sabores de chocolate e os sabores a café têm de ser colocados numa fila ou, então, os sabores de chocolate ficam numa fila e os de café noutra.

Determine, nestas condições, de quantos modos diferentes podem ser colocados os sabores dos gelados.

3. Considere a sucessão (a_n) definida por $a_n = \left(2 - \frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$.

Em relação a uma certa função f, sabe-se que $\lim f(a_n) = 0$.

Em qual das opções seguintes pode estar uma expressão da função f?

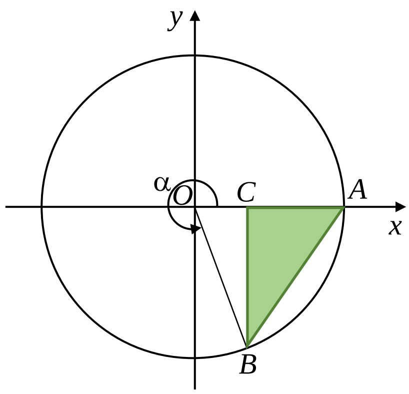
(A) 2^x **(B)** $\log_2\left(\frac{1}{x}\right)$ **(C)** $\frac{\operatorname{sen} x}{x}$ **(D)** $\cos x$

4. Na figura ao lado, está representada a circunferência trigonométrica e o triângulo retângulo $[ABC]$.

Sabe-se que:

- o ponto A tem coordenadas $(1,0)$;
- o ponto B pertence à circunferência e ao quarto quadrante;
- o ponto C pertence ao semieixo positivo Ox e tem a mesma abcissa que B.

Tal como sugere a figura, α é o ângulo que tem por lado origem o semieixo positivo Ox e por lado extremidade a semirreta $\dot{O}B$.



Qual das seguintes expressões dá a área do triângulo $[ABC]$, representado a sombreado, em função de α?

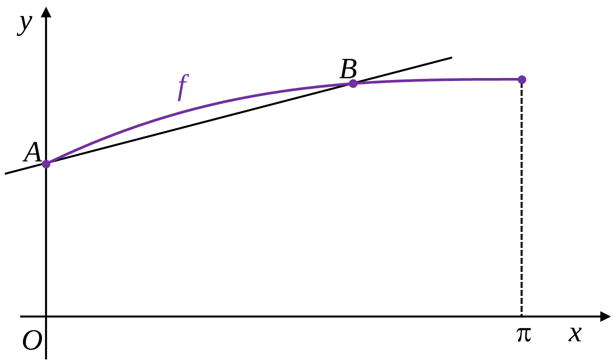
(A) $\frac{\text{sen}(2\alpha)}{2} - \text{tg}(\alpha)$ **(B)** $\frac{\cos(2\alpha)}{2} - \text{tg}(\alpha)$

(C) $\frac{\text{sen}(2\alpha)}{4} - \frac{\text{sen}(\alpha)}{2}$ **(D)** $\frac{\cos(2\alpha)}{4} - \frac{\cos(\alpha)}{2}$

5. Considere a função h, de domínio $\left]\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right[$, definida por $h(x) = 2\,\text{sen}(3x) + 3x$.

Estude a função h quanto à monotonia e determine, caso existam, os extremos relativos.

6. Na figura ao lado, está representado, em referencial o.n. xOy, o gráfico da função f, de domínio $[0,\pi]$, definida por $f(x) = \cos\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{x}{2}$.



Considere o ponto A, de abcissa 0, e o ponto B, de abcissa superior a 0.

Para cada posição do ponto B, considere a reta AB.

Exprima o declive da reta AB em função da abcissa de B, e, recorrendo à calculadora gráfica, determine essa abcissa para a qual o declive da reta AB é igual a $0,4$.

Apresente os elementos recolhidos na utilização da calculadora, nomeadamente:

- o(s) gráfico(s) obtido(s);
- o valor pedido, com arredondamento às milésimas.

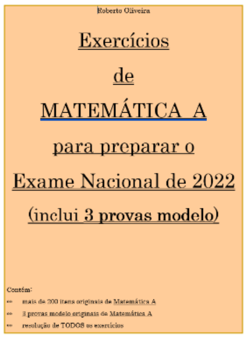
7. Sejam a e b dois números reais positivos tais que $a > b$.

Sabe-se que $a - b = \frac{a+b}{4}$.

Pode concluir-se que $\log_4\left(a^2 - b^2\right)$ é igual à expressão:

(A) $2\log_4(a+b) - 1$ **(B)** $2\left[\log_4(a+b) - 1\right]$

(C) $\frac{\ln(a+b)}{a-b}$ **(D)** $\frac{\ln(a+b)}{4(a-b)}$



8. Seja f a função, contínua em $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = e^{2x+4} - x$.

8.1. Calcule, usando a definição de derivada num ponto, $f'(-2)$.

8.2. Mostre que, no intervalo $]-2, 0[$, o gráfico de f interseta a reta de equação $y = -5x$ em pelo menos um ponto.

8.3. Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $f(x) > 2e^{2x+4} - 81 - x$.

9. Considere a função g, de domínio $]-\infty, 2\pi[\setminus\{3\}$, definida por $g(x) = \begin{cases} 7 + \ln(10-3x) & \text{se } x < 3 \\ \dfrac{\operatorname{sen}(x-3)}{x^2+x-12} & \text{se } 3 < x < 2\pi \end{cases}$.

Resolva os itens seguintes sem recorrer à calculadora.

9.1. Verifique se existe $\lim\limits_{x \to 3} g(x)$.

9.2. Quanto às assíntotas não verticais do gráfico de g, conclui-se que:

(A) Não existem;

(B) Existe uma de equação $y = 0$;

(C) Existe uma de equação $y = -3x + 16$;

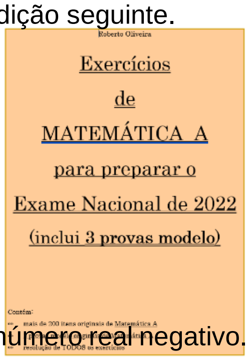
(D) Existem duas, de equações $y = 0$ e $y = -3x + 16$.

10. Considere a função h, de domínio $]1, +\infty[$, definida por $h(x) = \dfrac{\ln(x^2+4)}{\ln x}$.

Sem recorrer à calculadora, estude o gráfico de h quanto à existência de assíntotas, paralelas aos eixos coordenados.

11. Determine, sem recorrer à calculadora, o conjunto dos números reais que são solução da condição seguinte.

$$\log_3 \sqrt{9x^2 + 4x - 5} - \log_9\left(x^2 + 2\right) \leq 1$$



12. Considere a função g, de domínio $\mathbb{R}^-$, definida por $g(x) = \left(x^4 + 1\right)e^{4x^2 - kx^3} - 8$, sendo k um número real negativo.

Mostre que o gráfico de g tem uma assíntota horizontal e indique a sua equação.

FIM

COTAÇÕES

Item															
Cotação (em pontos)															
1.	**2.**	**3.**	**4.**	**5.**	**6.**	**7.**	**8.1.**	**8.2.**	**8.3.**	**9.1.**	**9.2.**	**10.**	**11.**	**12.**	
8	17	8	8	17	13	8	17	13	13	17	8	17	19	17	**200**

Formulário

Trigonometria

$$\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a \cos b+\operatorname{sen} b \cos a$$

$$\cos(a+b)=\cos a \cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Limites notáveis

$$\lim\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e \quad (n\in\mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{sen} x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^p}=+\infty \quad (p\in\mathbb{R})$$

Regras de derivação

$$(u+v)'=u'+v'$$

$$(uv)'=u'\,v+u\,v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}$$

$$(u^n)'=n\,u^{n-1}u' \quad (n\in\mathbb{R})$$

$$(\operatorname{sen} u)'=u'\cos u$$

$$(\cos u)'=-u'\operatorname{sen} u$$

$$(\operatorname{tg} u)'=\frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)'=u'\,e^u$$

$$(a^u)'=u'\,a^u\ln a \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$$

$$(\ln u)'=\frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)'=\frac{u'}{u\ln a} \quad (a\in\mathbb{R}^+\setminus\{1\})$$