Escola Secundária de Francisco Franco
www.esffranco.edu.pt
(2019/2020)
1.º Período

1.º TESTE DE MATEMÁTICA A – 11.º 6

24/10/19 Duração: 90 minutos

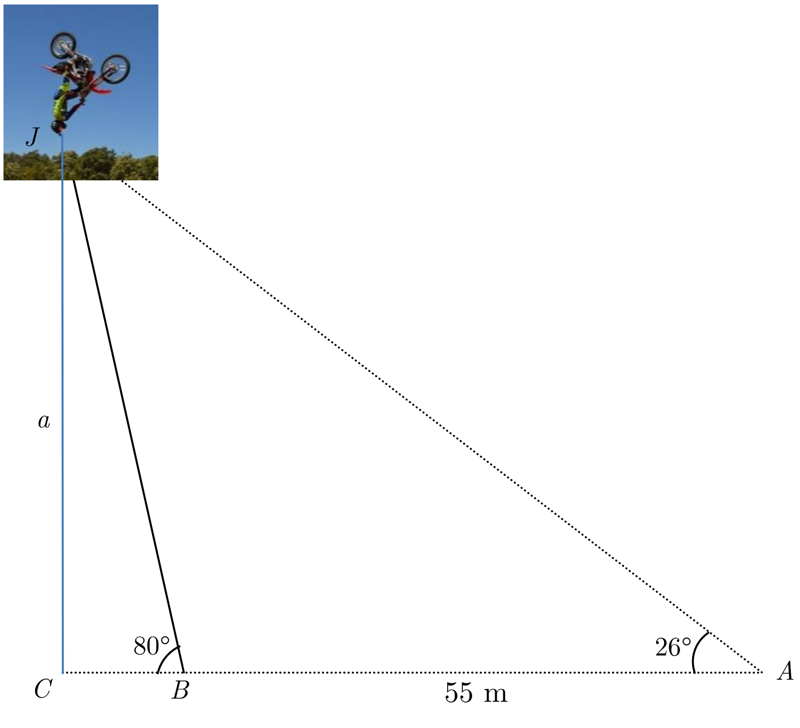
Nome: N.º:

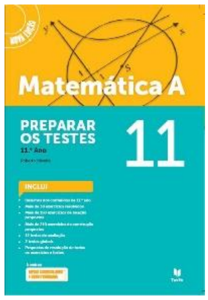
Classificação: , O professor:

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. O primeiro homem a conseguir um salto triplo à retaguarda com uma mota foi Josh Sheehan, em maio de 2015.





Sabe-se que Sheehan percorreu um caminho de terra e uma rampa até chegar a um ponto (B, na figura) e saltar segundo um ângulo de $80°$. Sabendo que o desenho não está à escala, admita que:

- de um certo local (ponto A), a 55 metros de B, foi observado o motociclista (ponto J) segundo um ângulo de amplitude $26°$;
- o ponto C é a projeção do ponto J no solo.

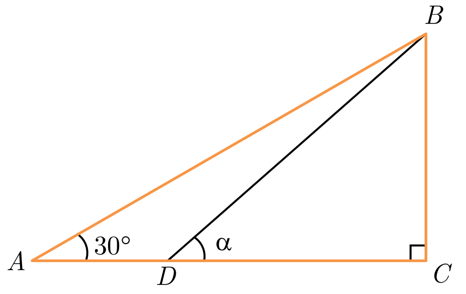
Atendendo aos dados da figura (e admitindo que todos os pontos da figura pertencem ao mesmo plano) determine a altitude a (ou $\overline{CJ}$) atingida por Josh Sheehan.
Apresente o resultado em metros, arredondado à décimas. Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, três casas decimais.

2. Dado o triângulo $[ABC]$ da figura, sabe-se que:

- D é um ponto pertencente ao lado $[AC]$;
- a amplitude do ângulo BAC é $30°$.

Seja α a amplitude do ângulo BDC.

Qual é a proposição verdadeira?

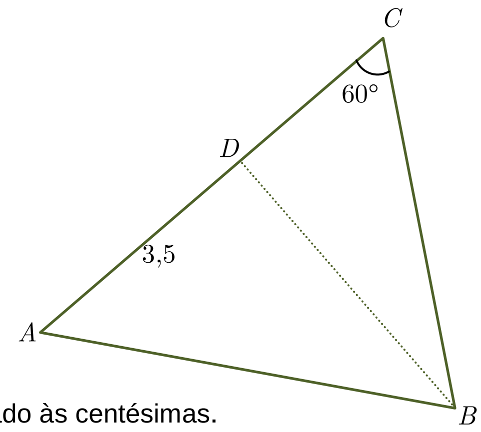


(A) $\overline{DC} = \dfrac{\overline{AB}}{2\,\text{sen}\,\alpha}$ **(B)** $\overline{DC} = \dfrac{\overline{AB}}{2\,\text{tg}\,\alpha}$

(C) $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AB}}{2\,\text{sen}\,\alpha}$ **(D)** $\overline{BC} = \dfrac{\overline{AB}}{2\,\text{tg}\,\alpha}$

3. Considere o triângulo $[ABC]$ da figura. Tal como sugere essa figura:

- $[BD]$ é a altura do triângulo relativo ao lado $[AC]$;
- $\overline{AD} = 3,5$;
- $A\hat{C}B = 60°$.



3.1. Suponha, nesta alínea, que $\overline{AB} = 6$.

Qual é o valor, em graus e minutos (arredondado às unidades), da amplitude do ângulo A?

(A) $31°69'$ **(B)** $31°41'$ **(C)** $54°19'$ **(D)** $54°31'$

3.2. Suponha agora que $\overline{BC} = 5$.

Determine o valor de $x = \overline{AB}$, apresentando o resultado arredondado às centésimas.

Se usar cálculos intermédios, conserve, pelo menos, duas casas decimais.

A seguir estão duas resoluções de dois alunos:

<u>Resolução da Balbina</u>

O triângulo $[BCD]$ é retângulo em D logo:

$$sen 60° = \frac{\overline{BD}}{5} \Leftrightarrow \overline{BD} = 5 sen 60° \approx 4,330$$

Assim, pelo teorema de Pitágoras:

$$x^2 = 3,5^2 + 4,33^2 \to x = \sqrt{3,5^2 + 4,33^2} \approx \boxed{5,57}$$

<u>Resolução do Julião</u>

$$\cos 60° = \frac{\overline{CD}}{5} \Leftrightarrow \overline{CD} = 5\cos 60° = 2,5$$

$$\therefore \overline{AC} = 2,5 + 3,5 = 6$$

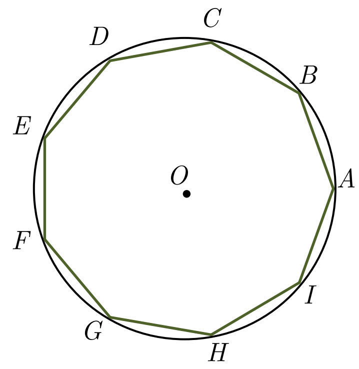
Pela lei dos cossenos:

$$6^2 = x^2 + 5^2 - 2\times 5\times x\cos 60° \Leftrightarrow 0 = x^2 - 5x - 11$$

$$\underset{\text{fórm.resolv.}}{\Leftrightarrow} \cancel{x \approx -1,65} \vee x \approx \boxed{6,65}$$

Apenas uma das resoluções está certa. Indique qual a certa e proponha uma alteração na resolução errada de modo a torná-la correta.

4. Na figura ao lado está o eneágono regular $[ABCDEFGHI]$, inscrito numa circunferência de centro O.



Considere as proposições seguintes.

(i) Se $\dot{O}A$ é o lado origem, então o lado extremidade do ângulo de amplitude $840°$ é $\dot{O}D$.

(ii) O transformado do ponto A pela rotação de centro O e ângulo de amplitude $(-80°,-5)$ é H.

(iii) O transformado do ponto C pela rotação de centro O é o ponto E se a amplitude do ângulo for $4120°$.

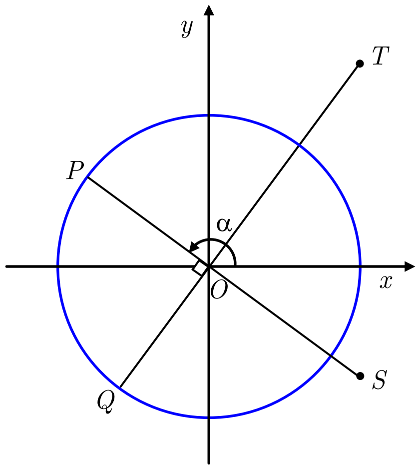
São verdadeiras as proposições:

(A) (i), (ii) e (iii) **(B)** (ii) e (iii) **(C)** (i) e (iii) **(D)** (i) e (ii)

5. Dada a circunferência trigonométrica da figura, sabe-se que:

- P é um ponto da circunferência e do segundo quadrante;
- Q é um ponto da circunferência e do terceiro quadrante;
- S é um ponto da reta OP, pertence ao quarto quadrante e tem abcissa 1;
- T é um ponto da reta OQ, pertence ao primeiro quadrante e tem abcissa 1;
- o ângulo POQ é reto.

O ângulo de amplitude α, assinalado na figura, tem por lado origem o semieixo positivo Ox e lado extremidade a semirreta $\dot{O}P$.



5.1. Suponha que $\operatorname{sen}\alpha = \operatorname{tg}\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Determine $\operatorname{sen}\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) + \cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(2\pi - \alpha)$.

5.2. Suponha agora que a ordenada do ponto S é $-\frac{3}{4}$.

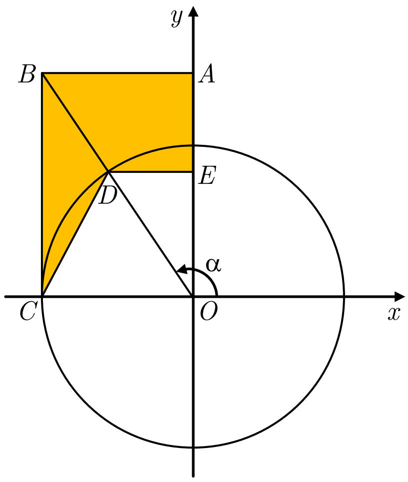
Qual é a ordenada do ponto T?

(A) $\sqrt{2}$ **(B)** $\frac{\sqrt{10}}{2}$ **(C)** $\frac{4}{3}$ **(D)** $\frac{5}{4}$

6. Na figura junta, estão representados a circunferência trigonométrica e o pentágono não convexo $[ABCDE]$.

Sabe-se que:

- o ponto A pertence ao semieixo positivo Oy;
- o ponto B tem abcissa -1 e ordenada igual à de A;
- o ponto C pertence à circunferência e ao semieixo negativo Ox;
- o ponto D pertence à circunferência e à semirreta $\dot{O}B$;
- o ponto E pertence ao eixo Oy e tem a mesma ordenada de D.



Seja α a amplitude de um ângulo orientado cujo lado origem é o semieixo positivo Ox e cujo lado extremidade é a semirreta $\dot{O}B$, $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$.

6.1. Mostre que a área do pentágono $[ABCDE]$ é dada por

$$\operatorname{sen}\alpha\left(\frac{\cos\alpha - 1}{2} - \frac{1}{\cos\alpha}\right)$$

6.2. Para um certo $\alpha \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right[$, sabe-se que $\operatorname{tg}\alpha = -\sqrt{15}$.

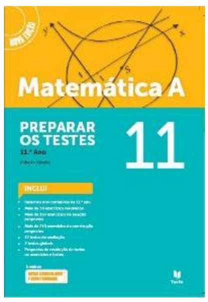
Determine, para esse valor de α, a área do pentágono $[ABCDE]$.

6.3. Para certo(s) valor(es) de α, a área do pentágono $[ABCDE]$ é igual a 3.

Determine, recorrendo à calculadora gráfica, o(s) valor(es) de α.

Na sua resposta:

- reproduza, num referencial, o(s) gráfico(s) da(s) função(ões) necessária(s);
- determine o(s) valor(es) de α com duas casas decimais.



7. Considere o círculo da figura, onde está assinalado o setor circular AOB.

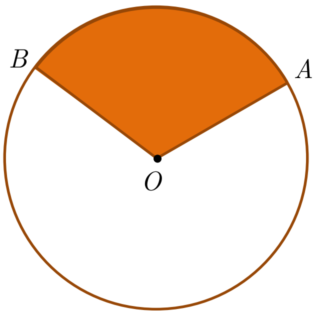
Sabe-se que:

• a amplitude do ângulo AOB é $\frac{5\pi}{8}$ radianos;

• a área desse setor circular é $5\pi \text{ cm}^2$.

Qual é o valor da medida do raio do círculo da figura?

(A) $\frac{5\pi}{2}\text{ cm}$ **(B)** $\frac{3\pi}{4}\text{ cm}$ **(C)** 8 cm **(D)** 4 cm



8. Determine os valores possíveis para $k \in \mathbb{R}$ de modo que seja possível a condição seguinte.

$$\operatorname{sen} x = \frac{1-2k}{3} \wedge x \in \left]\frac{\pi}{2}, \pi\right]$$

9. Considere a função, de domínio $\mathbb{R}$, definida por $f(x) = 2 - 3\cos(4x)$.

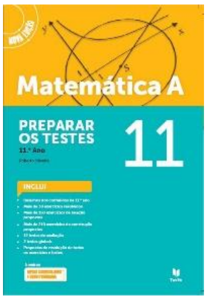
9.1. Determine o contradomínio da função f.

9.2. Prove que $\frac{\pi}{2}$ é o período positivo mínimo da função f.

9.3. Calcule $f\left(-\frac{\pi}{3}\right)$.

10. Mostre que, desde que faça sentido, se tem, para todo o x, $\dfrac{\operatorname{tg}^2 x \cos^2 x}{1+\cos x \operatorname{sen}^2 x+\cos^3 x} = 1 - \cos x$

FIM



COTAÇÕES

Item																
Cotação (em pontos)																
1.	**2.**	**3.1.**	**3.2.**	**4.**	**5.1.**	**5.2.**	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**7.**	**8.**	**9.1.**	**9.2.**	**9.3.**	**10.**	
14	8	8	14	8	17	8	14	17	14	8	14	14	14	14	14	**200**