

Teste N.º 2

Matemática A

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Risque aquilo que pretende que não seja classificado.

É permitido o uso de calculadora.

Apresente apenas uma resposta para cada item.

As cotações dos itens encontram-se no final do enunciado.

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva na folha de respostas o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando para um resultado não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Geometria

Comprimento de um arco de circunferência:

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$\frac{\alpha r^2}{2}$ (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base; g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n) :

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$\text{sen}(a + b) = \text{sen } a \cos b + \text{sen } b \cos a$

$\text{cos}(a + b) = \text{cos } a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$

Complexos

$(\rho e^{i\theta})^n = \rho^n e^{in\theta}$

$\sqrt[n]{\rho e^{i\theta}} = \sqrt[n]{\rho} e^{i \frac{\theta + 2k\pi}{n}}$ ($k \in \{0, \dots, n-1\}$ e $n \in \mathbb{N}$)

Regras de derivação

$(u + v)' = u' + v'$

$(u v)' = u' v + u v'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - u v'}{v^2}$

$(u^n)' = n u^{n-1} u' (n \in \mathbb{R})$

$(\text{sen } u)' = u' \text{cos } u$

$(\text{cos } u)' = -u' \text{sen } u$

$(\text{tg } u)' = \frac{u'}{\text{cos}^2 u}$

$(e^u)' = u' e^u$

$(a^u)' = u' a^u \ln a$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$

$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \ln a}$ ($a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$)

Limites notáveis

$\lim \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e$ ($n \in \mathbb{N}$)

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen } x}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty$ ($p \in \mathbb{R}$)

1. Turistas de diversas nacionalidades encontravam-se de visita à cidade do Porto.

1.1. Os turistas foram inquiridos acerca da sua preferência quanto ao melhor jogador de futebol do mundo – Cristiano Ronaldo ou Leonel Messi.

Sabe-se que todos os turistas responderam ao inquérito e que todos manifestaram preferência por um e apenas um dos dois futebolistas.

Sabe-se ainda que:

- um em cada três turistas era de nacionalidade italiana;
- dos turistas italianos, $\frac{5}{7}$ consideraram Cristiano Ronaldo como o melhor jogador do mundo;
- a probabilidade de um turista ter referido que considerava Leonel Messi como sendo o melhor jogador do mundo, sabendo que era um turista não italiano, é $\frac{11}{70}$.

Escolheu-se, ao acaso, um turista desse grupo.

Determine a probabilidade de o turista escolhido ser italiano ou considerar Cristiano Ronaldo como o melhor jogador do mundo.

Apresente o resultado sob a forma de fração irredutível.

1.2. Um autocarro turístico tem oito paragens previstas, em locais de interesse, para n turistas que se encontram no autocarro.

Supondo que cada turista escolhe, ao acaso, apenas uma das oito paragens para sair, qual é a probabilidade de todos os turistas escolherem sair no mesmo local de interesse?

- (A) $\frac{1}{{}^n A'_8}$ (B) $\frac{1}{{}^n C_8}$ (C) 8^{-n} (D) 8^{1-n}

1.3. Numa loja de lembranças, um turista comprou dois tipos de lembranças da cidade: ímanes e *pins*. No saco da compra encontravam-se seis ímanes e alguns *pins*.

Considere que foram retirados do saco dois desses objetos de forma aleatória, não repondo o primeiro antes de se retirar o segundo.

Sejam A e B os acontecimentos:

A : “o primeiro objeto retirado é um *pin*.”

B : “o segundo objeto retirado é um íman.”

Sabe-se que $P(B|A) = 0,5$.

Quantos *pins* se encontravam inicialmente no saco?

Elabore uma pequena composição, na qual justifique a sua resposta, começando por explicar o significado de $P(B|A)$, no contexto da situação descrita.

2. Seja n um número natural superior a dois.

Resolva a seguinte equação:

$${}^nA_2 + \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} = \frac{10}{9} + {}^nC_{n-1} \times {}^{n-1}C_1$$

3. Seja S , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Sabe-se que:

- $P(B) \neq 0$
- $P(A|B) = \frac{1}{3}$
- $P(A) = \frac{4}{3}P(B)$

Qual é o valor de $2P(B) + P(\bar{A} \cap \bar{B})$?

- (A) 0 (B) $\frac{2}{3}$ (C) $\frac{3}{4}$ (D) 1

4. A soma dos três primeiros elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 352.

Qual é a diferença entre a soma de todos os elementos dessa linha e o elemento central dessa linha?

- (A) 56 708 264
(B) 67 108 864
(C) 114 159 428
(D) 123 817 128

5. Considere o desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$, com $x > 0$.

Sem efetuar o desenvolvimento do binómio, determine, se existir, o termo independente.

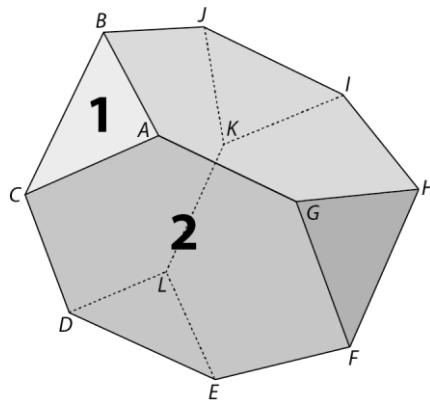
6. Seja S , conjunto finito, o espaço amostral associado a uma certa experiência aleatória.

Sejam A e B dois acontecimentos ($A \subset S$ e $B \subset S$).

Prove que:

$$P(A \cup B) + P(\bar{A} \cup B) - P(\bar{A}) = P(A) + P(B)$$

7. Na figura seguinte está representado o tetraedro truncado $[ABCDEFGH IJKL]$, sólido constituído por oito faces, das quais quatro são hexágonos regulares e quatro são triângulos equiláteros. Duas das faces já estão numeradas com os números 1 e 2, como mostra a figura.



- 7.1. Escolhem-se, ao acaso, dois vértices distintos do sólido.

Qual é a probabilidade de esses vértices formarem uma diagonal facial do sólido?

- (A) $\frac{5}{11}$ (B) $\frac{6}{11}$ (C) $\frac{9}{11}$ (D) $\frac{10}{11}$

- 7.2. Considere que se pretende numerar as seis faces do sólido não numeradas, utilizando os algarismos de 3 a 8 e colocando um algarismo diferente em cada face.

De quantas maneiras o poderemos fazer, de forma que:

- a) nas faces que são hexágonos fiquem só números primos?
b) nas faces que são triângulos sejam colocados no máximo dois números pares?

- 7.3. Considere agora que se dispõe de n cores diferentes ($n \geq 8$) para colorir todas as faces do sólido.

Qual é a probabilidade de, ao colorir cada face do sólido com uma única cor, exatamente duas faces sejam pintadas da mesma cor e as restantes faces sejam pintadas com cores diferentes entre si?

- (A) $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{n^8}$ (B) $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{nA_8}$ (C) $\frac{{}^8C_2 \times 2 \times {}^{n-1}A_6}{nA'_8}$ (D) $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}C_6 \times 8!}{n^8}$

FIM

COTAÇÕES

Item												
Cotação (em pontos)												
1.1.	1.2.	1.3.	2.	3.	4.	5.	6.	7.1.	7.2. a)	7.2. b)	7.3.	Total
25	10	20	25	10	10	20	20	10	20	20	10	200

TESTE N.º 2 – Proposta de resolução

1.

1.1. Consideremos os acontecimentos:

I : “o turista é de nacionalidade italiana.”

C : “o turista considera Cristiano Ronaldo o melhor jogador do mundo.”

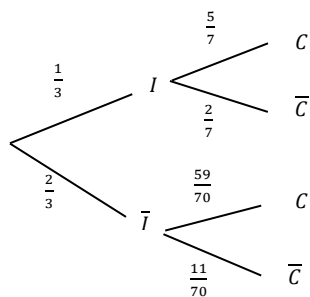
Sabemos que:

$$\bullet P(I) = \frac{1}{3}$$

$$\bullet P(C|I) = \frac{5}{7}$$

$$\bullet P(\bar{C}|\bar{I}) = \frac{11}{70}$$

Colocando estes dados num diagrama de árvore, obtém-se:



$$P(I \cap C) = \frac{1}{3} \times \frac{5}{7} = \frac{5}{21}$$

$$P(I \cap \bar{C}) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{7} = \frac{2}{21}$$

$$P(\bar{I} \cap C) = \frac{2}{3} \times \frac{59}{70} = \frac{59}{105}$$

$$P(\bar{I} \cap \bar{C}) = \frac{2}{3} \times \frac{11}{70} = \frac{11}{105}$$

$$P(C) = \frac{5}{21} + \frac{59}{105} = \frac{4}{5}$$

Pretende-se determinar $P(I \cup C)$.

$$P(I \cup C) = P(I) + P(C) - P(I \cap C) = \frac{1}{3} + \frac{4}{5} - \frac{5}{21} = \frac{94}{105}$$

1.2. Opção (D)

Número de casos possíveis: $T_1 \quad T_2 \quad T_3 \quad \dots \quad T_n \quad = 8^n$

$$\underbrace{8 \times 8 \times 8 \times \dots \times 8}_{n \text{ turistas}}$$

Número de casos favoráveis: 8 casos

A probabilidade pretendida é $\frac{8}{8^n} = 8^{1-n}$.

1.3. No contexto da situação descrita, $P(B|A)$ significa “a probabilidade de o segundo objeto retirado ser um íman, sabendo que o primeiro objeto retirado foi um *pin*”.

Como $P(B|A) = 0,5$, isto significa que no momento da segunda extração se encontravam no saco igual número de ímanes e de *pins*, ou seja, seis de cada tipo, já que na primeira extração se retirou um *pin* e lá permaneceram os seis ímanes. Pode concluir-se, então, que inicialmente se encontravam no saco sete *pins*.



2. Para $n > 2$:

$$\begin{aligned}
 {}^n A_2 + \frac{(n-1)!(n+1)!}{(n!)^2} &= \frac{10}{9} + {}^n C_{n-1} \times {}^{n-1} C_1 \Leftrightarrow \frac{n!}{(n-2)!} + \frac{(n-1)!(n+1) \times n!}{n! \times n!} = \frac{10}{9} + {}^n C_1 \times (n-1) \\
 &\Leftrightarrow n \times (n-1) + \frac{(n-1)!(n+1)}{n!} = \frac{10}{9} + n \times (n-1) \\
 &\Leftrightarrow \frac{(n-1)!(n+1)}{n \times (n-1)!} = \frac{10}{9} \\
 &\Leftrightarrow \frac{n+1}{n} = \frac{10}{9} \\
 &\Leftrightarrow 9n + 9 = 10n \\
 &\Leftrightarrow n = 9
 \end{aligned}$$

C. S. = {9}

3. Opção (D)

$$\begin{aligned}
 2P(B) + P(\overline{A \cap B}) &= 2P(B) + P(\overline{A \cup B}) = 2P(B) + 1 - P(A \cup B) = \\
 &= 2P(B) + 1 - P(A) - P(B) + P(A \cap B) = \\
 &= P(B) + 1 - \frac{4}{3}P(B) + \frac{1}{3}P(B) = \\
 &= -\frac{1}{3}P(B) + 1 + \frac{1}{3}P(B) = \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{aligned}
 P(A|B) = \frac{1}{3} &\Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{3} \\
 &\Leftrightarrow P(A \cap B) = \frac{1}{3}P(B)
 \end{aligned}$$

4. Opção (A)

$$\begin{aligned}
 {}^n C_0 + {}^n C_1 + {}^n C_2 &= 352 \Leftrightarrow 1 + n + \frac{n!}{2!(n-2)!} = 352 \\
 &\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n \times (n-1)(n-2)!}{2(n-2)!} = 352 \\
 &\Leftrightarrow 1 + n + \frac{n \times (n-1)}{2} = 352 \\
 &\Leftrightarrow 2 + 2n + n^2 - n = 704 \\
 &\Leftrightarrow n^2 + n - 702 = 0 \\
 &\Leftrightarrow n = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \times 1 \times (-702)}}{2 \times 1} \\
 &\Leftrightarrow n = 26 \vee n = -27
 \end{aligned}$$

Logo, $n = 26$.

A soma de todos os elementos desta linha é igual a $2^{26} = 67\,108\,864$.

O elemento central desta linha é ${}^{26} C_{13} = 10\,400\,600$.

Assim, a diferença entre a soma de todos os elementos dessa linha e o elemento central dessa linha é $67\,108\,864 - 10\,400\,600 = 56\,708\,264$.



5. O termo geral do desenvolvimento de $\left(\frac{\sqrt{x}}{2} - \frac{1}{x^2}\right)^{10}$ é:

$$\begin{aligned} {}^{10}C_k \left(\frac{\sqrt{x}}{2}\right)^{10-k} \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)^k &= {}^{10}C_k \times 2^{k-10} \times x^{5-\frac{k}{2}} \times (-1)^k \times x^{-2k} = \\ &= {}^{10}C_k \times 2^{k-10} \times (-1)^k \times x^{5-\frac{5}{2}k}, k \in \{0, 1, 2, \dots, 10\} \end{aligned}$$

Como pretendemos determinar o termo independente:

$$\begin{aligned} 5 - \frac{5}{2}k = 0 &\Leftrightarrow -\frac{5}{2}k = -5 \\ &\Leftrightarrow k = 2 \end{aligned}$$

Assim, o termo independente é:

$$\begin{aligned} {}^{10}C_2 \times 2^{2-10} \times (-1)^2 &= 45 \times \frac{1}{256} \times 1 = \\ &= \frac{45}{256} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 6. P(A \cup B) + P(\overline{A} \cup B) - P(\overline{A}) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) + P(\overline{A}) + P(B) - P(\overline{A} \cap B) - P(\overline{A}) = \\ &= P(A) + P(B) + P(B) - P(A \cap B) - (P(B) - P(A \cap B)) = \\ &= P(A) + P(B) + P(B) - P(A \cap B) - P(B) + P(A \cap B) = \\ &= P(A) + P(B) \quad \text{c.q.d.} \end{aligned}$$

7.

7.1. Opção (B)

O número de casos possíveis é igual a ${}^{12}C_2$.

O número de casos favoráveis é igual ao número de diagonais dos 4 hexágonos:

$$4 \times ({}^6C_2 - 6)$$

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{4 \times ({}^6C_2 - 6)}{{}^{12}C_2} = \frac{6}{11}$.

7.2.

a) A face hexagonal numerada está numerada com o número primo 2 e a face triangular numerada está numerada com o número 1. Assim, restam-nos os números primos 3, 5 e 7 para distribuir pelas três faces hexagonais restantes, o que pode ser feito de $3!$ maneiras distintas. Por cada uma destas maneiras existem $3!$ modos distintas de numerar as três faces triangulares, ainda não numeradas, com os números 4, 6 e 8.

Assim, $3! \times 3! = 36$ é o número pedido.

b) Existem três casos mutuamente exclusivos:

1.º caso: zero números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

2.º caso: um número par nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^3C_1 \times {}^3C_2 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

3.º caso: dois números pares nas três faces triangulares restantes:

$$\underbrace{{}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3!}_{\text{faces triangulares}} \times \underbrace{3!}_{\text{faces hexagonais}}$$

Logo, o número pedido é igual a:

$$3! \times 3! + {}^3C_2 \times {}^3C_1 \times 3! \times 3! \times 2 = 684$$

7.3. Opção (A)

O número de casos possíveis é igual a n^8 .

8C_2 é o número de maneiras distintas de escolher as duas faces, de entre as oito faces que vão ficar com a mesma cor. Por cada uma destas maneiras existem n cores distintas para pintar as duas faces que vão ficar com a mesma cor.

Escolhidas essas duas faces e a cor, restam $n - 1$ cores distintas para colorir as seis faces restantes, logo ${}^{n-1}A_6$ é o número de modos distintos de pintar as seis faces restantes com cores diferentes entre si.

Assim, o número de casos favoráveis é dado por ${}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6$.

Logo, a probabilidade pedida é igual a $\frac{{}^8C_2 \times n \times {}^{n-1}A_6}{n^8}$.