Proposta de teste de avaliação

Matemática A

10.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos | **Data:**

Grupo I

Na resposta aos itens deste grupo, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

1. Considere, num referencial o. n. xOy, o ponto P de coordenadas $\left(a^2-16,\ 9\right)$, com $a \in \mathbb{R}$.

Para que valores de a é que o ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares?

(A) $a = \pm 1$ **(B)** $a = \pm 5$

(C) $a = \pm 4$ **(D)** $a = \pm 2$

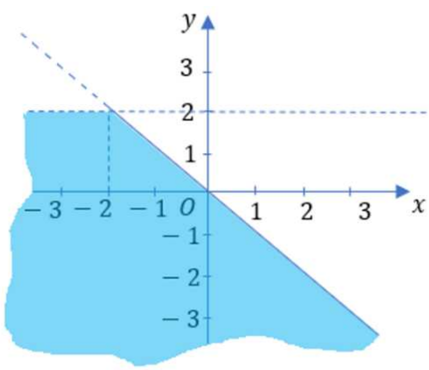
2. Dados dois pontos, A e B, num referencial o. n. xOy, sabe-se que uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$.

Qual dos seguintes pontos **não** é equidistante de A e de B?

(A) $\left(2,\ \frac{13}{4}\right)$ **(B)** $\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$

(C) $\left(-6,\ -\frac{3}{4}\right)$ **(D)** $\left(\frac{1}{2},\ 5\right)$

3. Qual das seguintes condições representa o conjunto de pontos assinalados no referencial o. n. xOy da figura?



(A) $y \leq x \land y < 2$

(B) $y \leq -x \land y < 2$

(C) $y \leq x \lor y < 2$

(D) $y \leq -x \lor y < 2$

4. Num referencial o. n. xOy, conhecidos dois pontos, A e B, qual é o lugar geométrico dos pontos $P(x,y)$ para os quais, se tem:

$$\overline{PA}=\overline{AB}\,?$$

(A) Circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$.

(B) Circunferência de centro em B e raio $\overline{AB}$

(C) Circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}^2$.

(D) Mediatriz do segmento de reta $[AB]$.

5. Para que valor de k a equação $x^2-2x+y^2=k-6y$ representa, num plano munido de um referencial o. n. xOy, uma circunferência de raio 3?

(A) $k=7$ **(B)** $k=-1$ **(C)** $k=\sqrt{3}$ **(D)** $k=-8$

Grupo II

Na resposta aos itens deste grupo apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

6. Considere num referencial o. n. xOy os pontos A e B de coordenadas, respetivamente, $(1,1)$ e $(-1,3)$.

6.1. Mostre, por processos analíticos, que a mediatriz de $[AB]$ é paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

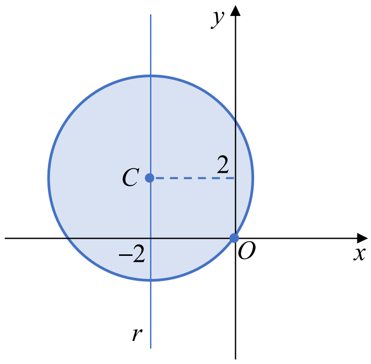
6.2. Determine as coordenadas do ponto P sabendo que as coordenadas do ponto médio de $[PB]$ são $\left(\frac{1}{5},-\frac{2}{7}\right)$.

6.3. Determine as coordenadas dos pontos Q, com ordenada 2, tais que $\overline{QA}=\sqrt{5}$.

6.4. Considere agora um outro ponto, C, com coordenadas $(2,6)$.

Prove, por processos analíticos, que o triângulo $[ABC]$ é retângulo.

7. No referencial o. n. xOy da figura, representou-se o círculo com centro em $C(-2,2)$ cuja circunferência passa pela origem do referencial e a reta r que passa por C e é paralela ao eixo Oy.



7.1. Escreva, sem apresentar justificação, uma condição que defina a reta paralela a r que passa na origem do referencial.

7.2. Mostre que o raio da circunferência é $2\sqrt{2}$.

7.3. Investigue a posição relativa do ponto P de coordenadas $\left(\sqrt{3}-2,\ 4\right)$ relativamente à circunferência representada na figura.

7.4. Escreva uma condição que represente os pontos do círculo representado que estão no primeiro quadrante.

8. Seja k um número real positivo.

Prove que a área da região definida por:

$$x^2 + y^2 \leq k^2 \wedge y \geq -x \wedge x \geq 0$$

é igual a $\frac{3\pi k^2}{8}$.

FIM

COTAÇÕES

Grupo I

1.	2.	3.	4.	5.	Total
8	8	8	8	8	**40**

Grupo II

6.1.	6.2.	6.3.	6.4.	7.1.	7.2.	7.3.	7.4.	8.	Total
25	20	25	20	5	10	20	15	20	**160**

Proposta de resolução

Grupo I

1. Se o ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, a sua abcissa é igual à ordenada.

Logo:

$a^2 - 16 = 9 \Leftrightarrow a^2 = 25 \Leftrightarrow a = \pm\sqrt{25} \Leftrightarrow a = \pm 5$

Resposta: (B)

2. Para não ser equidistante a A e a B, não pode pertencer à mediatriz de $[AB]$, de equação $y = \frac{1}{2}x + \frac{9}{4}$. Verifiquemos qual dos pontos indicados não pertence a esta reta:

(A) $\left(2, \frac{13}{4}\right)$: $\quad \frac{13}{4} = \frac{1}{2} \times 2 + \frac{9}{4} \Leftrightarrow \frac{13}{4} = \frac{13}{4}$ (Verdadeiro)

(B) $\left(\frac{3}{2}, 3\right)$: $\quad 3 = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow 3 = 3$ (Verdadeiro)

(C) $\left(-6, -\frac{3}{4}\right)$: $\quad -\frac{3}{4} = \frac{1}{2} \times (-6) + \frac{9}{4} \Leftrightarrow -\frac{3}{4} = -\frac{3}{4}$ (Verdadeiro)

(D) $\left(\frac{1}{2}, 5\right)$: $\quad 5 = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{9}{4} \Leftrightarrow 5 = \frac{10}{4}$ (Falso)

O ponto indicado em (D) não pertence à mediatriz de $[AB]$.

Resposta: (D)

3. A região apresentada é a interseção de dois semiplanos:

- o semiplano definido pela condição $y \leq -x$ (a região representada está “abaixo” da reta de equação $y = -x$ e inclui a fronteira);
- o semiplano definido pela condição $y < 2$ (a região representada está “abaixo” da reta de equação $y = 2$, não a incluindo).

Portanto, a região apresentada pode ser definida por $y \leq -x \wedge y < 2$

Resposta: (B)

4. A condição $\overline{PA}=\overline{AB}$ define o conjunto de pontos P do plano cuja distância ao ponto A é igual a $\overline{AB}$.

Como A e B são conhecidos a condição $\overline{PA}=\overline{AB}$ define a circunferência de centro em A e raio $\overline{AB}$.

Resposta: (A)

5. Tem-se que:

$$x^2-2x+y^2=k-6y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+y^2+6y=k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^2-2x+1)-1+(y^2+6x+9)-9=k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=k+1+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2+(y+3)^2=k+10$$

Assim, a condição dada representa uma circunferência de centro em $(1,-3)$ e raio r com $r^2=k+10$.

Como é dito no enunciado que o raio é 3, tem-se que:

$k+10=3^2 \Leftrightarrow k=9-10 \Leftrightarrow k=-1$

Resposta: (B)

Grupo II

6.

6.1. Seja $P(x,y)$ um ponto da mediatriz de $[AB]$ com $A(1,1)$ e $B(-1,3)$.

Assim, tem-se que:

$$(x-1)^2+(y-1)^2=(x+1)^2+(y-3)^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2-2x+1+y^2-2y+1=x^2+2x+1+y^2-6y+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -2y+6y=2x+2x-1+9 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4y=4x+8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y=x+2$$

Assim, uma equação da mediatriz de $[AB]$ é $y=x+2$, reta paralela à reta de equação $y=x$, ou seja, paralela à bissetriz dos quadrantes ímpares.

6.2. Designando por (x, y) as coordenadas do ponto P, tem-se que:

$$\left(\frac{x-1}{2}, \frac{y+3}{2}\right) = \left(\frac{1}{5}, -\frac{2}{7}\right). \qquad | \; B(-1, 3)$$

Assim, tem-se que:

$$\begin{cases} \frac{x-1}{2} = \frac{1}{5} \\ \frac{y+3}{2} = -\frac{2}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 1 = \frac{2}{5} \\ y + 3 = -\frac{4}{7} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{5} + 1 \\ y = -\frac{4}{7} - 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{7}{5} \\ y = -\frac{25}{7} \end{cases}$$

Logo, as coordenadas de P são: $\left(\frac{7}{5}, -\frac{25}{7}\right)$.

6.3. Como Q tem coordenadas $(x, 2)$ e A tem coordenadas $(1, 1)$, tem-se que:

$$\overline{QA} = \sqrt{5} \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{5}.$$

Elevando ambos os membros ao quadrado, obtém-se:

$$(x-1)^2 + (1-2)^2 = 5 \Leftrightarrow (x-1)^2 + 1 = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x - 1 = -2 \vee x - 1 = 2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -2 + 1 \;\vee\; x = 2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = -1 \;\vee\; x = 3$$

Logo existem dois pontos nestas condições: $Q(-1, 2)$ ou $Q(3, 2)$.

6.4. $\overline{AB} = \sqrt{(1+1)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{8}$

$\overline{AC} = \sqrt{(1-2)^2 + (1-6)^2} = \sqrt{26}$

$\overline{BC} = \sqrt{(-1-2)^2 + (3-6)^2} = \sqrt{18}$

$\left(\sqrt{26}\right)^2 = \left(\sqrt{8}\right)^2 + \left(\sqrt{18}\right)^2$ pois $26 = 8 + 18$

Logo, como $\overline{AC}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{BC}^2$, pelo recíproco do teorema de Pitágoras, o triângulo $[ABC]$ é retângulo (em B).

7.

7.1. $x = 0$

7.2. Como o raio, r, é igual a $\overline{CO}$, vem que:

$$r = \overline{CO} = \sqrt{(-2-0)^2 + (2+0)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

7.3. $\overline{PC}=\sqrt{\left(\sqrt{3}-2+2\right)^2+\left(4-2\right)^2}=\sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2}=\sqrt{3+4}=\sqrt{7}<\sqrt{8}$

Como $\overline{PC}<r$, pois $r=\sqrt{8}$, o ponto P pertence ao círculo representado.

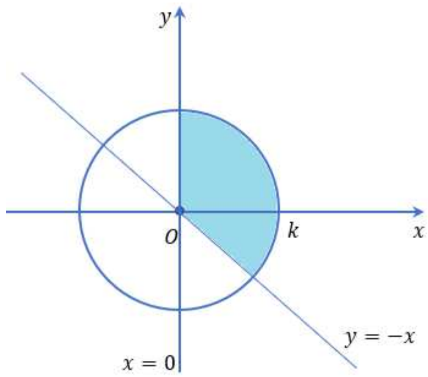
7.4. Como $r^2=\left(2\sqrt{2}\right)^2=8$, a condição pedida ser

$$\left(x+2\right)^2+\left(y-2\right)^2\leq 8 \wedge x>0 .$$

8. Pretende-se determinar a área da região definida por:

$x^2+y^2\leq k^2 \wedge y\geq -x \wedge x\geq 0$

Fazendo um esboço dessa região, obtém-se:



Assim, pretende-se determinar a soma da área da quarta parte do círculo que está no primeiro quadrante com a área da oitava parte do círculo que está no quarto quadrante e "acima" da bissetriz dos quadrantes pares, porque esta divide-o em duas partes iguais.

Como a área do círculo todo seria $\pi\times k^2$, obtém-se:

$$\text{Área pedida}=\frac{\pi\times k^2}{4}+\frac{\pi\times k^2}{8}=\frac{2\pi k^2}{8}+\frac{\pi k^2}{8}=\frac{3\pi k^2}{8}$$