

Teste N.º 2

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

NÃO É PERMITIDO O USO DE CALCULADORA

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Na resposta aos itens de escolha múltipla, selecione a opção correta. Escreva, na folha de respostas, o número do item e a letra que identifica a opção escolhida.

Na resposta aos restantes itens, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias. Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

1. Fixada uma unidade de comprimento, considere um cubo de aresta a .

O volume da esfera circunscrita ao cubo pode ser dado, em função de a e em unidades de volume, por:

(A) $4\sqrt{3}\pi a^3$ (B) $3\sqrt{3}\pi a^3$

(C) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\pi a^3$ (D) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3$

2. Na figura está representado um triângulo equilátero $[ABC]$.

Os pontos D , E e F são os pontos médios dos lados do triângulo.

O perímetro do triângulo $[ABC]$ é igual a 8. Sejam X , Y e Z três pontos.

Sabe-se que:

• $X = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{ED}$

• $Y = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$

• $Z = F + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB}$

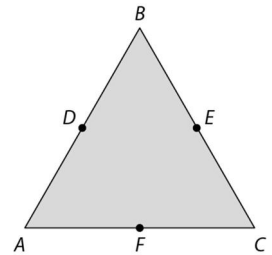
O perímetro do triângulo $[XYZ]$ é igual a:

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 1



3. Considere, num referencial ortogonal e monométrico Oxy , a bissetriz dos quadrantes pares.

Sejam A e B os pontos dessa bissetriz com ordenadas 2 e 5, respetivamente.

3.1. Determine as coordenadas do vetor \vec{u} , colinear e com sentido contrário de \overrightarrow{AB} e de norma igual a 6.

3.2. Seja P um ponto que pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$. Sabe-se que a ordenada do ponto P é igual ao dobro da sua abcissa.

Determine as coordenadas de P .

3.3. Considere que a semirreta $\hat{O}A$ roda 180° em torno da origem, no plano Oxy . Nessa rotação, o segmento de reta $[AB]$, que está contido na semirreta $\hat{O}A$, descreve uma região plana.

Uma condição que define essa região plana é:

(A) $\sqrt{8} \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{50} \wedge y \leq -x$

(B) $\sqrt{8} \leq x^2 + y^2 \leq \sqrt{50} \wedge y \geq -x$

(C) $8 \leq x^2 + y^2 \leq 50 \wedge y \leq -x$

(D) $8 \leq x^2 + y^2 \leq 50 \wedge y \geq -x$

4. Para um certo número real negativo a são paralelas as retas r e s , definidas, num referencial o.n. Oxy , pelas condições:

$$r: 8ax + a^2y - 3 = 0 \quad \text{e} \quad s: (x, y) = (-1, -1) + k(2a, -a^2), k \in \mathbb{R}$$

Qual é o valor de a ?

- (A) -1 (B) -2 (C) -3 (D) -4

5. Fixado um referencial o.n. do plano, considere a seguinte condição:

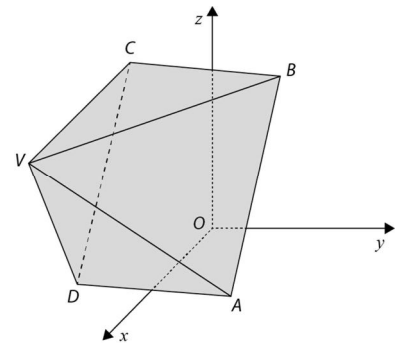
$$3x - y \leq 2 \quad \wedge \quad x \geq -3 \quad \wedge \quad 3 - y \geq 0$$

Sabe-se que a representação geométrica do conjunto de pontos do plano definido pela condição anterior é um triângulo.

Represente-o num referencial e determine o valor exato da sua área.

6. Na figura está representado, num referencial o.n. $Oxyz$, uma pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

Os vértices A e C têm coordenadas $(2, 1, 0)$ e $(0, -1, 2)$, respetivamente. O vértice V tem coordenadas $(3, -1, 2)$.



- 6.1. Defina por uma condição:

6.1.1. o plano que contém o vértice da pirâmide e é paralelo ao plano yOz .

6.1.2. a superfície esférica de centro em V e que passa em B .

6.1.3. o segmento de reta $[VW]$, sendo W o ponto simétrico do ponto V , em relação ao plano xOy .

- 6.2. Determine uma equação do plano DVB .

Apresente essa equação na forma $ax + by + cz + d = 0$.

- 6.3. Determine o volume da pirâmide.

7. A interseção da superfície esférica $(x - 1)^2 + y^2 + (z + 1)^2 = 25$ com o plano de equação $x = 4$ é:
- (A) uma circunferência de centro $C(1, 0, -1)$ e raio igual a 5.
 - (B) uma circunferência de centro $C(4, 0, -1)$ e raio igual a 5.
 - (C) uma circunferência de centro $C(1, 0, -1)$ e raio igual a 4.
 - (D) uma circunferência de centro $C(4, 0, -1)$ e raio igual a 4.

FIM

COTAÇÕES

Item													
Cotação (em pontos)													
1.	2.	3.1.	3.2.	3.3.	4.	5.	6.1.1.	6.1.2.	6.1.3.	6.2.	6.3.	7.	
8	8	20	20	8	8	25	10	20	20	20	25	8	200

Teste N.º 2 – Proposta de resolução

1. Opção (D)

Comecemos por determinar a medida da diagonal espacial de um cubo de aresta a , com $a > 0$:

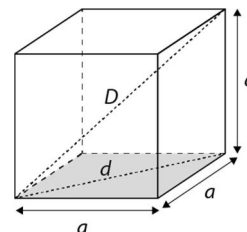
$$d^2 = a^2 + a^2 \Leftrightarrow d^2 = 2a^2$$

$$D^2 = d^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 2a^2 + a^2 \Leftrightarrow D^2 = 3a^2 \Leftrightarrow \underbrace{D}_{D>0} = \sqrt{3}a$$

A diagonal espacial D do cubo é o diâmetro da esfera circunscrita ao cubo, logo o seu raio é igual a $\frac{\sqrt{3}}{2}a$.

Assim, o volume da esfera é igual a:

$$\frac{4}{3} \times \pi \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3 = \frac{4}{3} \times \pi \times \frac{3\sqrt{3}}{8}a^3 = \frac{\sqrt{3}}{2}\pi a^3 \text{ unidades de volume.}$$



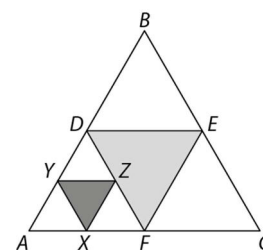
2. Opção (C)

Os triângulos $[ADF]$, $[DEF]$, $[FEC]$ e $[DBE]$ são geometricamente iguais e também são equiláteros.

- $X = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{ED} = C + \frac{3}{2}\overrightarrow{CF}$, logo X é o ponto médio do segmento de reta $[AF]$.
- $Y = A - \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = A + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, logo Y é o ponto médio do segmento de reta $[AD]$.
- $Z = F + \frac{1}{4}\overrightarrow{CB} = F + \frac{1}{2}\overrightarrow{FD}$, logo Z é o ponto médio do segmento de reta $[FD]$.

O triângulo $[XYZ]$ é semelhante ao triângulo $[ABC]$, com razão de semelhança igual a $\frac{1}{4}$.

Logo, o perímetro do triângulo $[XYZ]$ é igual a $\frac{1}{4} \times 8 = 2$ unidades de comprimento.



3.

3.1. Sabemos que $A(-2, 2)$ e $B(-5, 5)$.

Comecemos por determinar as coordenadas do vetor \overrightarrow{BA} :

$$\overrightarrow{BA} = (-2, 2) - (-5, 5) = (3, -3)$$

Assim, $\exists k \in \mathbb{R}: \vec{u} = k(3, -3)$. Como $\|\vec{u}\| = 6$, então:

$$|k| \times \|(3, -3)\| = 6 \Leftrightarrow |k| \times \sqrt{9+9} = 6 \Leftrightarrow \sqrt{18}|k| = 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3\sqrt{2}|k| = 6 \Leftrightarrow |k| = \frac{6}{3\sqrt{2}} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |k| = \frac{2}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow |k| = \sqrt{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow k = -\sqrt{2} \vee k = \sqrt{2}$$

Como \vec{u} tem o mesmo sentido que o vetor \overrightarrow{BA} , então $k = \sqrt{2}$. Logo, $\vec{u} = (3\sqrt{2}, -3\sqrt{2})$.

3.2. Começemos por determinar uma condição da mediatriz do segmento de reta $[AB]$:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+2)^2 + (y-2)^2} &= \sqrt{(x+5)^2 + (y-5)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x+2)^2 + (y-2)^2 &= (x+5)^2 + (y-5)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 + y^2 - 4y + 4 &= x^2 + 10x + 25 + y^2 - 10y + 25 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 10y - 4y &= 10x - 4x + 50 - 8 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow 6y &= 6x + 42 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow y &= x + 7\end{aligned}$$

Como o ponto P pertence à mediatriz do segmento de reta $[AB]$ e a sua ordenada é igual ao dobro da abcissa, vem que:

$$\begin{cases} y = x + 7 \\ y = 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x + 7 \\ \text{_____} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ y = 14 \end{cases}$$

Assim, $P(7, 14)$.

3.3. Opção (C)

A bissetriz dos quadrantes pares é definida pela condição $y = -x$.

$$\overline{OA} = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$$

$$\overline{OB} = \sqrt{25+25} = \sqrt{50}$$

A rotação da semirreta \overline{OA} de 180° em torno da origem define uma semicorôa circular de centro O .

Assim, a condição que define a região plana pretendida é:

$$(\sqrt{8})^2 \leq (x-0)^2 + (y-0)^2 \leq (\sqrt{50})^2 \wedge y \leq -x \Leftrightarrow 8 \leq x^2 + y^2 \leq 50 \wedge y \leq -x$$

4. Opção (D)

As retas r e s são paralelas se e só se os seus declives forem iguais.

$$8ax + a^2y - 3 = 0 \Leftrightarrow a^2y = -8ax + 3$$

$$\Leftrightarrow y = -\frac{8}{a}x + \frac{3}{a^2}$$

Assim, o declive da reta r é igual a $-\frac{8}{a}$ e o declive da reta s é igual a $\frac{-a^2}{2a} = -\frac{a}{2}$.

Então, para que as retas r e s sejam paralelas, tem-se que:

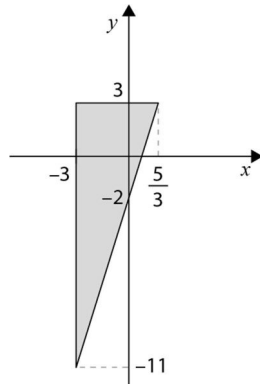
$$-\frac{8}{a} = -\frac{a}{2} \Leftrightarrow 16 = a^2$$

$$\Leftrightarrow a = \pm 4$$

Como $a < 0$, então $a = -4$.

$$5. 3x - y \leq 2 \wedge x \geq -3 \wedge 3 - y \geq 0 \Leftrightarrow -y \leq -3x + 2 \wedge x \geq -3 \wedge -y \geq -3$$

$$\Leftrightarrow y \geq 3x - 2 \wedge x \geq -3 \wedge y \leq 3$$



x	$y = 3x - 2$
0	-2
$\frac{5}{3}$	3
-3	-11

Cálculo auxiliar	
$3 = 3x - 2 \Leftrightarrow 5 = 3x \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}$	

$$A = \frac{\left(3 + \frac{5}{3}\right) \times (11 + 3)}{2} = \frac{\frac{14}{3} \times 14}{2} = \frac{14}{3} \times 7 = \frac{98}{3} \text{ unidades de área}$$

6.

6.1.

6.1.1. $x = 3$

6.1.2. $\overline{VB} = \overline{VC}$, pois a pirâmide $[ABCDV]$ é quadrangular regular.

$$\overline{VC} = \sqrt{(3 - 0)^2 + (-1 + 1)^2 + (2 - 2)^2} = 3$$

Logo, uma condição da superfície esférica de centro em V e que passa em B é:

$$(x - 3)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = 9$$

6.1.3. $W(3, -1, -2)$, pois é o simétrico de V em relação a xOy .

Uma condição que define $[VW]$ é $x = 3 \wedge y = -1 \wedge -2 \leq z \leq 2$.

6.2. O plano DVB é o plano mediador do segmento de reta $[AC]$:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 0)^2} &= \sqrt{(x - 0)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow (x - 2)^2 + (y - 1)^2 + z^2 &= x^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 2y + 1 + z^2 &= x^2 + y^2 + 2y + 1 + z^2 - 4z + 4 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x - 2y - 2y + 4z + 4 + 1 - 1 - 4 &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -4x - 4y + 4z &= 0 \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow -x - y + z &= 0 \end{aligned}$$

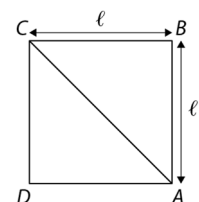
6.3. Comecemos por determinar a área da base (quadrado):

$$\overline{AC} = d(A, C) = \sqrt{(2 - 0)^2 + (1 + 1)^2 + (0 - 2)^2} = \sqrt{4 + 4 + 4} = \sqrt{12}$$

$$\overline{AC}^2 = l^2 + l^2 \Leftrightarrow 12 = 2l^2 \Leftrightarrow l^2 = 6$$

Seja E o ponto médio do segmento de reta $[AC]$:

$$E \left(\frac{2+0}{2}, \frac{1-1}{2}, \frac{0+2}{2} \right) = (1, 0, 1)$$



A altura da pirâmide é igual a $\overline{E\overline{V}}$:

$$\overline{E\overline{V}} = d(E, V) = \sqrt{(3-1)^2 + (-1-0)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$$

Logo, o volume da pirâmide é igual a $\frac{1}{3} \times 6 \times \sqrt{6} = 2\sqrt{6}$ unidades de volume.

7. Opção (D)

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 4 \\ (x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25 \end{cases} &\Leftrightarrow \{(4-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \{9 + y^2 + (z+1)^2 = 25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y^2 + (z+1)^2 = 16 \end{cases} \end{aligned}$$

Logo, a interseção da superfície esférica com o plano é uma circunferência de centro de coordenadas $(4, 0, -1)$ e raio igual a 4.