

Teste N.º 1

Matemática A

Duração do Teste (Caderno 1+ Caderno 2): 90 minutos

12.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: _____ N.º: ____ Turma: ____

Este teste é constituído por **dois** cadernos:

- Caderno 1 – com recurso à calculadora;
- Caderno 2 – sem recurso à calculadora.

Utilize apenas caneta ou esferográfica de tinta indelével, azul ou preta.

Não é permitido o uso de corretor. Em caso de engano, deve riscar de forma inequívoca aquilo que pretende que não seja classificado.

Escreva de forma legível a numeração dos itens, bem como as respetivas respostas. As respostas ilegíveis ou que não possam ser claramente identificadas são classificadas com zero pontos.

Para cada item, apresente apenas uma resposta. Se escrever mais do que uma resposta a um mesmo item, apenas é classificada a resposta apresentada em primeiro lugar.

O teste inclui um formulário.

As cotações encontram-se no final do enunciado da prova.

Para responder aos itens de escolha múltipla, não apresente cálculos nem justificações e escreva, na folha de respostas:

- o número do item;
- a letra que identifica a única opção escolhida.

Na resposta aos itens de resposta aberta, apresente todos os cálculos que tiver de efetuar e todas as justificações necessárias.

Quando, para um resultado, não é pedida a aproximação, apresente sempre o valor exato.

Formulário

Comprimento de um arco de circunferência

αr (α – amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; r – raio)

Área de um polígono regular: Semiperímetro \times Apótema

Área de um setor circular:

$$\frac{\alpha r^2}{2} \quad (\alpha - \text{amplitude, em radianos, do ângulo ao centro; } r - \text{raio})$$

Área lateral de um cone: $\pi r g$ (r – raio da base;

g – geratriz)

Área de uma superfície esférica: $4 \pi r^2$ (r – raio)

Volume de uma pirâmide: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de um cone: $\frac{1}{3} \times$ Área da base \times Altura

Volume de uma esfera: $\frac{4}{3} \pi r^3$ (r – raio)

Progressões

Soma dos n primeiros termos de uma progressão (u_n)

Progressão aritmética: $\frac{u_1 + u_n}{2} \times n$

Progressão geométrica: $u_1 \times \frac{1 - r^n}{1 - r}$

Trigonometria

$$\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$$

$$\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Complexos

$$(\rho \operatorname{cis} \theta)^n = \rho^n \operatorname{cis} (n\theta) \quad \text{ou} \quad (re^{i\theta})^n = r^n e^{in\theta}$$

$$\sqrt[n]{\rho \operatorname{cis} \theta} = \sqrt[n]{\rho} \operatorname{cis} \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad \text{ou} \quad \sqrt[n]{r e^{i\theta}} = \sqrt[n]{r} e^{i \left(\frac{\theta + 2k\pi}{n} \right)}$$

$$(k \in \{0, \dots, n-1\} \text{ e } n \in \mathbb{N})$$

Probabilidades

$$\mu = p_1 x_1 + \dots + p_n x_n$$

$$\sigma = \sqrt{p_1 (x_1 - \mu)^2 + \dots + p_n (x_n - \mu)^2}$$

Se X é $N(\mu, \sigma)$, então:

$$P(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) \approx 0,6827$$

$$P(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) \approx 0,9545$$

$$P(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) \approx 0,9973$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v} \right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$$

$$(u^n)' = n \cdot u^{n-1} \cdot u' \quad (n \in \mathbb{R})$$

$$(\sin u)' = u' \cdot \cos u$$

$$(\cos u)' = -u' \cdot \sin u$$

$$(\operatorname{tg} u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$$

$$(e^u)' = u' \cdot e^u$$

$$(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

$$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$$

$$(\log_a u)' = \frac{u'}{u \cdot \ln a} \quad (a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$$

Limites notáveis

$$\lim \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e \quad (n \in \mathbb{N})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^p} = +\infty \quad (p \in \mathbb{R})$$



CADERNO 1: 45 MINUTOS
É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



1. Uma determinada operadora de telecomunicações tem todos os seus números de telefone começados por 94 e mais sete dígitos. Um número de telefone desta operadora é, por exemplo, 94 975 13 53. Com os algarismos deste exemplo, quantos números de telefone diferentes pode esta operadora criar?

(A) 210

(B) 1260

(C) 5040

(D) 362 880

2. No jantar do seu 17.º aniversário, a Rita convidou as suas três melhores amigas para jantar em sua casa. No jantar participaram também os pais, a irmã, os quatro avós e duas tias.

2.1. Quantos grupos diferentes de cinco pessoas se podem formar com a Rita e com, pelo menos, dois dos seus familiares?

2.2. Dispondo-se lado a lado, para uma fotografia, todas as pessoas presentes no jantar, quantas fotografias diferentes podem ser tiradas com os quatro avós juntos e com as três amigas também juntas?

2.3. Mais tarde juntaram-se à festa n amigos. No final da noite sabe-se que se todas as pessoas presentes na festa tivessem dançado com todos os outros, aos pares, teriam sido feitos 210 pares diferentes. Determine quantos amigos se juntaram à festa.

Comece por escrever uma equação que traduza o problema. Utilize a calculadora apenas em eventuais cálculos numéricos.

3. Considere um prisma regular em que cada base é um decágono. Qual é o número total de diagonais de todas as faces do prisma (incluindo as bases)?

(A) 45

(B) 90

(C) 110

(D) 180

4. A soma dos dois primeiros elementos de uma certa linha do triângulo de Pascal é 47.

Escolhem-se, ao acaso, dois elementos dessa linha.

Determine a probabilidade de esses dois elementos serem iguais.

Apresente o resultado na forma decimal, arredondado às milésimas.

5. Considere o desenvolvimento de $\left(3 + \frac{x}{3}\right)^5 + (a + x)^6$ com $a \in \mathbb{R}$.

Sabendo que o coeficiente do termo em x^3 é igual a $\frac{3850}{3}$, determine o valor da constante a .

FIM DO CADERNO 1

COTAÇÕES (Caderno 1)

Item							
Cotação (em pontos)							
1.	2.1.	2.2.	2.3.	3.	4.	5.	
8	15	15	20	8	15	20	101

CADERNO 2: 45 MINUTOS
NÃO É PERMITIDO O USO DA CALCULADORA.



6. Uma florista tem n espécies de flores diferentes entre si ($n > 1$).

Tendo em conta apenas as espécies de flores presentes nos ramos, quantos tipos de ramos diferentes consegue a florista fazer com pelo menos duas das espécies de flores que possui?

- (A) $n^2 - n$ (B) $2^n - 1$ (C) $2^n - 1 - n$ (D) $n^2 - 1$

7. Considere que para um certo número natural p e um certo número natural a se tem que:

$${}^{2020}C_{p+2} = a.$$

Então ${}^{2018}C_p + {}^{2019}C_{p+2} + {}^{2018}C_{p+1}$ é igual a:

- (A) $3a$ (B) $2a$ (C) a (D) $\frac{a}{3}$

8. Considere o seguinte problema:

Utilizando os sete algarismos que constituem o número 5 454 531, quantos números pares podem ser formados?

$${}^6C_3 \times 3! \quad \text{e} \quad \frac{6! \times 2}{3! \times 2!} \quad \text{são duas respostas corretas.}$$

Numa pequena composição, explique o raciocínio que conduziu a cada uma das respostas.

9. Verifique se existe algum valor natural n que satisfaça a igualdade:

$${}^{n+1}A_2 + \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-4)! + (n-3)!} = 5$$

10. O André e o Diogo juntaram-se com alguns amigos num convívio. Se n for o número de pessoas no convívio ($n > 3$), de quantas maneiras se podem dispor lado a lado em linha reta os n amigos se o André e o Diogo ficarem separados?

- (A) $2! \times (n-1)!$
(B) $(n-1)! \times (n-2)$
(C) $(n-1)!$
(D) $2! \times (n-1)! \times (n-2)$



11. Sejam E um conjunto finito, não vazio, e P uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$. Sejam A e B dois acontecimentos em E .

Sabe-se que:

- $P(\bar{A}) = 0,3$
- $P(A \cap B) = 0,2$

Prove que $P(A|B) \geq \frac{2}{5}$.

12. Sabe-se que, entre todos os turistas que visitam a cidade do Porto, a probabilidade de estes terem chegado à cidade de avião através de uma companhia aérea *low cost* é 0,75.

Constatou-se que:

- 40% dos turistas que chegaram ao Porto por meio de uma companhia aérea *low cost* têm menos de 40 anos;
- em cada quatro turistas com idade não inferior a 40 anos, três chegaram ao Porto por meio de uma companhia aérea *low cost*.

Determine a probabilidade de um turista que visita a cidade do Porto, escolhido ao acaso, ter idade não inferior a 40 anos.

FIM DO CADERNO 2

COTAÇÕES (Caderno 2)

Item							
Cotação (em pontos)							
6.	7.	8.	9.	10.	11.	12.	
8	8	20	20	8	15	20	99

TESTE N.º 1
Matemática A
Proposta de resolução

CADERNO 1

1. Opção (B)

$$9 \cdot 4 \cdot \underbrace{\hspace{2cm}}$$

$${}^7C_2 \times {}^5C_2 \times 3! = 1260$$

- 7C_2 é o número de maneiras de escolher 2 das 7 posições para colocar o algarismo “5”;
- 5C_2 é o número de maneiras de escolher 2 das 5 posições ainda disponíveis para colocar o algarismo “3”;
- $3!$ é o número de maneiras de permutar os 3 algarismos diferentes entre si (1, 7 e 9).

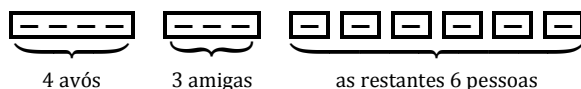
2.

2.1. ${}^9C_2 \times {}^3C_2 + {}^9C_3 \times {}^3C_1 + {}^9C_4 = 486$

Como existem 9 familiares e 3 amigas, para formar este grupo de 5 pessoas nestas condições, existem três tipos de hipóteses em alternativa:

- O grupo é formado pela Rita, 2 familiares e 2 amigas – existem ${}^1C_1 \times {}^9C_2 \times {}^3C_2$ maneiras;
- O grupo é formado pela Rita, 3 familiares e 1 amiga – existem ${}^1C_1 \times {}^9C_3 \times {}^3C_1$ maneiras;
- O grupo é formado pela Rita e 4 familiares – existem ${}^1C_1 \times {}^9C_4 \times {}^3C_0$ maneiras.

2.2. $4! \times 3! \times 8! = 5\,806\,080$



- $4!$ é o número de maneiras de os 4 avós se colocarem para a fotografia, permutando entre si;
- $3!$ é o número de maneiras de as 3 amigas se colocarem para a fotografia, permutando entre si;
- $8!$ é o número de maneiras de permutar as restantes 6 pessoas entre si e também com o bloco dos avós e o bloco das amigas.

$$2.3. {}^{13+n}C_2 = 210$$

$$\Leftrightarrow \frac{(13+n)!}{2! \times (13+n-2)!} = 210 \Leftrightarrow \frac{(n+13) \times (n+12) \times (n+11)!}{2 \times (n+11)!} = 210$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 12n + 13n + 156 = 420 \Leftrightarrow n^2 + 25n - 264 = 0$$

$$\Leftrightarrow n = \frac{-25 \pm \sqrt{25^2 - 4 \times 1 \times (-264)}}{2 \times 1} \Leftrightarrow n = \frac{-25 + 41}{2} \vee n = \frac{-25 - 41}{2}$$

$$\Leftrightarrow n = 8 \vee n = -33$$

Juntaram-se à festa 8 amigos.

3. Opção (B)

$$2 \times 10 + 2 \times ({}^{10}C_2 - 10) = 90$$

- 2×10 é o número de diagonais das faces laterais, já que o prisma tem 10 faces laterais e cada uma delas tem 2 diagonais;
- $2 \times ({}^{10}C_2 - 10)$ é o número de diagonais das 2 bases: ${}^{10}C_2$ é o número de segmentos de reta definidos pelos vértices de uma das bases, o que inclui os 10 lados dessa base, logo ${}^{10}C_2 - 10$ é o número de diagonais de cada uma das bases.

4. Sabemos que $1 + n = 47$, isto é, $n = 46$.

A linha de ordem $n = 46$ tem 47 elementos. Assim, existem ${}^{47}C_2$ maneiras distintas de escolher dois elementos dessa linha e 23×1 maneiras distintas de escolher dois elementos iguais, pois, os elementos equidistantes dos extremos são iguais.

Logo, $\frac{23}{{}^{47}C_2} \approx 0,021$ é a probabilidade pedida.

5. O termo geral do desenvolvimento de $\left(3 + \frac{x}{3}\right)^5$ é ${}^5C_k \times 3^{5-k} \times \left(\frac{x}{3}\right)^k = {}^5C_k \times 3^{5-2k} \times x^k$, $k \in \{0, 1, 2, \dots, 5\}$.

O termo geral do desenvolvimento de $(a+x)^6$ é ${}^6C_p \times a^{6-p} \times x^p$, $p \in \{0, 1, 2, \dots, 6\}$

O coeficiente do termo em x^3 é dado por ${}^5C_3 \times 3^{-1} + {}^6C_3 \times a^3$

$$\text{Então, } \frac{{}^5C_3}{3} + {}^6C_3 \times a^3 = \frac{3850}{3} \Leftrightarrow \frac{10}{3} + 20a^3 = \frac{3850}{3} \Leftrightarrow 10 + 60a^3 = 3850 \Leftrightarrow 60a^3 = 3840 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^3 = 64 \Leftrightarrow a = 4$$

CADERNO 2

6. Opção (C)

2^n é o número total de subconjuntos de um conjunto com n elementos, onde está incluído o conjunto vazio e n subconjuntos com apenas 1 elemento.

Como se pretende fazer ramos com pelo menos duas espécies de flores, tem-se que $2^n - 1 - n$ é uma resposta correta ao problema.

7. Opção (C)

$$\begin{aligned} & 2018C_p + 2019C_{p+2} + 2018C_{p+1} \\ &= \underbrace{2018C_p + 2018C_{p+1}} + 2019C_{p+2} \\ &= 2019C_{p+1} + 2019C_{p+2} \\ &= 2020C_{p+2} \\ &= a \end{aligned}$$

8. Pretendemos determinar o número de números pares que podem ser formados utilizando os sete algarismos que constituem o número 5 454 531.

Uma resposta correta é ${}^6C_3 \times 3!$. Começamos por notar que, para ser par, tem que terminar obrigatoriamente em 4. Assim, restam três algarismos iguais a 5, um algarismo 4, um algarismo 3 e um algarismo 1 para colocar em 6 posições.

Existem 6C_3 maneiras distintas de escolher as três posições de entre as 6 possíveis para colocar os três algarismos 5. E, por cada uma destas maneiras, existem $3!$ maneiras distintas de colocar os algarismos 4, 3 e 1 em três posições distintas.

Uma resposta igualmente correta é $\frac{6! \times 2}{3! \times 2!}$. Como para o número ser par tem que terminar em 4, existem 2 possibilidades para o último algarismo (os dois algarismos 4). E, para cada uma destas maneiras, existem $6!$ maneiras distintas de colocar seis algarismos em seis posições. No entanto, como existem três algarismos iguais a 5 e dois algarismos iguais a 4 que não alteram o número quando permutam entre si, dividimos por $3! \times 2!$.

9. Note-se que para a expressão do primeiro membro da igualdade fazer sentido, é necessário que $n - 4 \geq 0$. Assim, $n \geq 4$.

$${}^{n+1}A_2 + \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-4)! + (n-3)!} = 5 \Leftrightarrow (n+1)n + \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-4)! + (n-3)(n-4)!} = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + n + \frac{(n-2)(n-3)!}{(n-4)!(1+n-3)} = 5 \Leftrightarrow n^2 + n + (n-3) = 5 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow n^2 + 2n - 8 = 0 \Leftrightarrow n = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \times (-8)}}{2} \Leftrightarrow n = 2 \vee n = -4$$

Como $n \geq 4$, então a equação é impossível.

c. s. = \emptyset

10. Opção (B)

$n!$ é o número de maneiras de se colocarem lado a lado n amigos, sem restrições.

$2! \times (n-2)! \times (n-1)!$ é o número de maneiras de se colocarem lado a lado com o André e o Diogo juntos.

$n! - 2! \times (n-1)! = n(n-1)! - 2 \times (n-1)! = (n-1)! \times (n-2)$ é a resposta pedida.

11. Sabemos que:

$$P(\bar{A}) = 0,3 \text{ e } P(A \cap B) = 0,2$$

$$\text{Então, } P(A) = 0,7$$

E, como $P(A \cup B) \leq 1$, então, $P(A) + P(B) - P(A \cap B) \leq 1$, logo,

$$P(B) \leq 1 - 0,7 + 0,2, \text{ ou seja,}$$

$$P(B) \leq 0,5$$

De onde se conclui que:

$$\frac{1}{P(B)} \geq 2 \Leftrightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \geq 0,4 \Leftrightarrow P(A|B) \geq \frac{2}{5}$$

12. Consideremos os seguintes acontecimentos:

A: “ter chegado ao Porto na companhia aérea *low cost*”

B: “ter idade inferior a 40 anos”

Sabemos que:

$$P(A) = \frac{3}{4}$$

$$P(B|A) = \frac{2}{5}, \text{ ou seja, } \frac{P(B \cap A)}{\frac{3}{4}} = \frac{2}{5} \Leftrightarrow P(B \cap A) = \frac{3}{10}$$

$$P(A|\bar{B}) = \frac{3}{4}, \text{ ou seja, } \frac{P(A \cap \bar{B})}{P(\bar{B})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{P(A) - P(A \cap B)}{P(\bar{B})} = \frac{3}{4} \Leftrightarrow \frac{\frac{3}{4} - \frac{3}{10}}{\frac{3}{4}} = P(\bar{B}) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{9}{20}}{\frac{3}{4}} = P(\bar{B}) \Leftrightarrow P(\bar{B}) = \frac{3}{5}$$