Teste de Matemática A

2016 / 2017

Teste N.º 3

Matemática A

Duração do Teste: 90 minutos

10.º Ano de Escolaridade

Nome do aluno: ____ N.º: ____ Turma: ____

Grupo I

- Os cinco itens deste grupo são de escolha múltipla.
- Em cada um deles, são indicadas quatro alternativas de resposta, das quais **só uma** está correta.
- Escreva na sua folha de respostas **apenas o número de cada item e a letra** correspondente à alternativa que selecionar para responder a esse item.
- Se apresentar mais do que uma alternativa, a resposta será classificada com zero pontos, o mesmo acontecendo se a letra transcrita for ilegível.
- **Não apresente cálculos nem justificações.**

1. Considere as proposições p e q:

p: $\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a+b}$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$.

q: $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a \times b}$, para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}^+$ e $n \in \mathbb{N}$.

Qual das seguintes proposições é verdadeira?

(A) $(\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow q$

(B) $(q \Rightarrow p) \wedge \sim p$

(C) $(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$

(D) $(p \vee q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)$

2. Seja $P(x)$ um polinómio do terceiro grau tal que:

- 2 é raiz dupla de $P(x)$;
- $P(x)$ é divisível por $x + 1$;
- o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 3$ é 25.

Qual das seguintes opções corresponde ao polinómio $P(x)$?

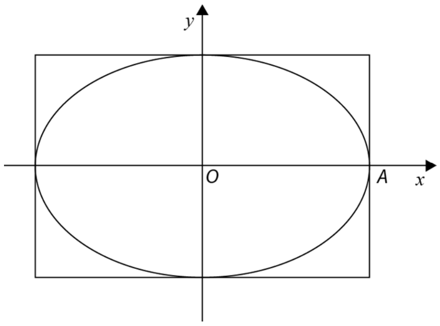
(A) $x^3 - 3x^2 + 4$

(B) $-\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} - 2$

(C) $-\frac{x^3}{2} - \frac{5x^2}{2} - 4x + 2$

(D) $\frac{x^3}{2} - \frac{5x^2}{2} + 4x + 2$

3. Na figura encontra-se representada em referencial o.n. xOy uma elipse inscrita num retângulo. O ponto A pertence à elipse e a um dos lados do retângulo. Sabendo que a área do retângulo é 216 e que o ponto A tem coordenadas $(9, 0)$, qual das seguintes opções é uma equação da elipse?



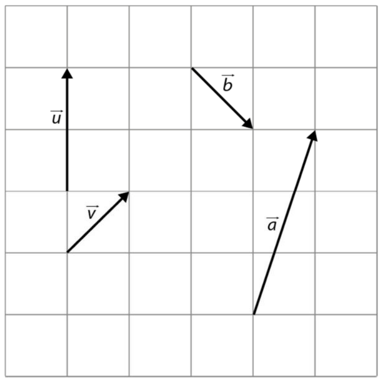
(A) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$

(B) $\frac{x^2}{216} + \frac{y^2}{81} = 1$

(C) $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{64} = 1$

(D) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{81} = 1$

4. Considere os vetores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{a}$ e $\vec{b}$ representados na figura.



Qual das seguintes afirmações é verdadeira?

(A) $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = -\vec{v}$

(B) $\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = -\vec{u} + \vec{v}$

(C) $\vec{a} = \vec{u} - \vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$

(D) $\vec{a} = -\vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = \vec{u} + \vec{v}$

5. Fixado um referencial o.n. xOy, considere uma reta r paralela ao eixo Ox. Qual das seguintes equações pode definir essa reta?

(A) $(x, y) = (1,0) + k(1, -1), k \in \mathbb{R}$

(B) $(x, y) = (1,2) + k(0,1), k \in \mathbb{R}$

(C) $(x, y) = (1,2) + k(1,0), k \in \mathbb{R}$

(D) $(x, y) = (0,1) + k(1,1), k \in \mathbb{R}$

Grupo II

Nas respostas aos itens deste grupo apresente o seu raciocínio de forma clara, indicando **todos os cálculos** que tiver de efetuar e **todas as justificações** necessárias.

Atenção: Quando para um resultado não é pedida a aproximação, pretende-se sempre o **valor exato**.

1. Considere o conjunto $U = \{-1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ e as condições:

$a(x): 9 - 3x \leq 0$

$b(x): x^2 - 4 = 0$

$c(x): x^2 - 1 \geq 0 \ \vee \ x^3 - 1 < 0$

1.1. Classifique, em U, as seguintes condições.

1.1.1. $a(x) \ \wedge \ b(x)$

1.1.2. $c(x)$

1.2. Indique, justificando, o valor lógico da proposição $\forall x \in U, a(x) \Rightarrow \sim b(x)$.

1.3. Considere as condições $a(x)$ e $b(x)$ definidas em U e sejam A e B os seus conjuntos-solução, respetivamente. Represente em extensão o conjunto $B \backslash A$.

2. Considere a família de polinómios:

$$P(x) = ax^3 - bx^2 - 4x + 5, \text{ onde } a, b \in \mathbb{R}$$

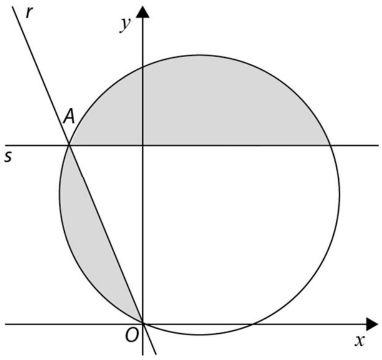
2.1. Sejam $a = 1$ e $b = -2$. Mostre que $P\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right) = 8 - 3\sqrt{2}$.

2.2. Determine a e b de modo que o resto da divisão de $P(x)$ por $x + 2$ seja -3 e que 1 seja uma raiz do polinómio.

2.3. Considere $a = -2$ e $b = 11$.

Resolva, em $\mathbb{R}$, a inequação $P(x) \leq 0$, apresentando o conjunto-solução na forma de intervalo ou de reunião de intervalos de números reais.

3. Na figura encontram-se representadas, em referencial o.n. xOy, as retas r e s e a circunferência de equação $x^2 + y^2 - 4x - 10y = 0$



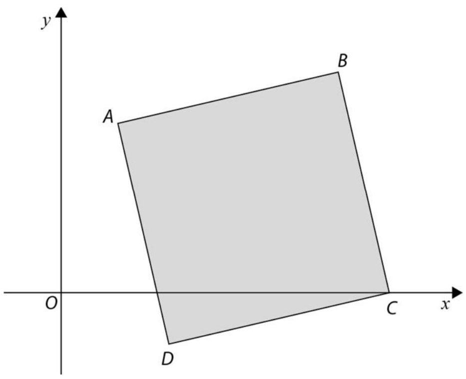
Sabe-se que a reta r passa no ponto $A(-3, 7)$ e na origem do referencial e que a reta s passa no ponto A e é paralela ao eixo Ox.

3.1. Determine as coordenadas do centro da circunferência e o seu raio.

3.2. Represente através de uma condição a região sombreada, incluindo a sua fronteira.

3.3. Seja B o ponto de coordenadas $(2, -5)$. Determine a equação reduzida da mediatriz de $[AB]$.

4. Na figura encontra-se representado, em referencial o.n. xOy, o quadrado $[ABCD]$ de área igual a 17.



Sabe-se que o ponto C pertence ao eixo Ox e que as retas AB e BC são definidas, respetivamente, por $(x, y) = (1, 3) + k(4, 1), k \in \mathbb{R}$ e $4x + y = 24$. Determine:

4.1. as coordenadas do ponto B;

4.2. uma equação vetorial da reta CD.

– FIM –

COTAÇÕES

Grupo I 50

Cada resposta certa 10

Cada resposta errada.. 0

Cada questão não respondida ou anulada................................ 0

Grupo II 150

1. 30
   - 1.1. 10
   - 1.2. 10
   - 1.3. 10
2. 45
   - 2.1. 15
   - 2.2. 15
   - 2.3. 15
3. 45
   - 3.1. 15
   - 3.2. 15
   - 3.3. 15
4. 30
   - 4.1. 15
   - 4.2. 15

TOTAL 200

TESTE N.º 3 – Proposta de resolução

Grupo I

1. Opção (C)

A proposição p é falsa e a proposição q é verdadeira.

$\big((\sim p \Rightarrow \sim q) \Leftrightarrow q\big) \Leftrightarrow \big((\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{V}\big) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

$\big((q \Rightarrow p) \wedge \sim p\big) \Leftrightarrow \big((\mathrm{V} \Rightarrow \mathrm{F}) \wedge \mathrm{V}\big) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \wedge \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

$\big((p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)\big) \Leftrightarrow \big((\mathrm{F} \wedge \mathrm{F}) \vee (\mathrm{V} \wedge \mathrm{V})\big) \Leftrightarrow (\mathrm{F} \vee \mathrm{V}) \Leftrightarrow \mathrm{V}$

$\big((p \vee q) \Rightarrow (p \Leftrightarrow q)\big) \Leftrightarrow \big((\mathrm{F} \vee \mathrm{V}) \Rightarrow (\mathrm{F} \Leftrightarrow \mathrm{V})\big) \Leftrightarrow (\mathrm{V} \Longrightarrow \mathrm{F}) \Leftrightarrow \mathrm{F}$

2. Opção (B)

$P(x)$ é um polinómio de grau 3, 2 é raiz dupla de $P(x)$ e $P(x)$ é divisível por $x+1$, logo $P(x) = a(x-2)^2(x+1)$.

Pelo Teorema do Resto, como o resto da divisão de $P(x)$ por $x+3$ é 25, então:

$$P(-3) = 25 \Leftrightarrow a(-3-2)^2(-3+1) = 25 \Leftrightarrow -2a = 1$$

$$\Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

Logo:

$$P(x) = -\frac{1}{2}(x-2)^2(x+1) = -\frac{1}{2}(x^2-4x+4)(x+1) =$$

$$= -\frac{1}{2}(x^3-3x^2+4) =$$

$$= -\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2}{2} - 2$$

3. Opção (A)

$\overline{OA} = 9$, que é a medida do semieixo maior da elipse e também a medida de metade do comprimento do retângulo.

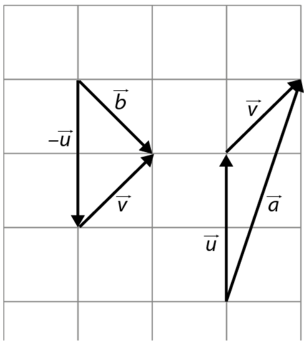
$A_{\text{retângulo}} = (2 \times 9) \times h \Leftrightarrow 216 = 18h \Leftrightarrow h = 12$

Assim, a altura do retângulo é 12, que é a medida do eixo menor da elipse.

Logo, uma equação da elipse é $\frac{x^2}{9^2} + \frac{y^2}{6^2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{36} = 1$.

4. Opção (B)

$\vec{a} = \vec{u} + \vec{v}$ e $\vec{b} = -\vec{u} + \vec{v}$



5. Opção (C)

Uma reta paralela ao eixo Ox tem como vetor diretor (1, 0), por exemplo.
Não poderá ter como vetor diretor nenhum dos vetores $(1, -1)$, $(0, 1)$ ou $(1, 1)$, correspondentes às restantes opções.
Assim, a equação da reta r pode ser $(x, y) = (1, 2) + k(1, 0), k \in \mathbb{R}$.

Grupo II

1.

1.1.

1.1.1. $a(x) \wedge b(x) \Leftrightarrow 9 - 3x \leq 0 \wedge x^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x \geq 3 \wedge (x = -2 \vee x = 2)$

Condição impossível em U.

1.1.2. $x^2 - 1 \geq 0 \vee x^3 - 1 < 0 \Leftrightarrow (x \geq 1 \vee x \leq -1) \vee x < 1$

Condição universal em U.

1.2. $\forall x \in U, a(x) \Rightarrow \sim b(x) \Leftrightarrow \forall x \in U, 9 - 3x \leq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0$

Se $x \in \{-1, 0, 1, 3, 4, 5\}$, então a condição $x^2 - 4 \neq 0$ transforma-se numa proposição verdadeira, pelo que a condição $9 - 3x \leq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0$ também se transforma numa proposição verdadeira.
Se $x = 2$, então a condição $9 - 3x \leq 0$ transforma-se numa proposição falsa e a condição $x^2 - 4 \neq 0$ também se transforma numa proposição falsa, pelo que a condição $9 - 3x \leq 0 \Rightarrow x^2 - 4 \neq 0$ se transforma numa proposição verdadeira.
Assim, $\forall x \in U, a(x) \Rightarrow \sim b(x)$ é uma proposição verdadeira.

1.3. Em U:

$9-3x \leq 0 \Leftrightarrow -3x \leq -9 \Leftrightarrow x \geq 3$

$A=\{3,4,5\}$

$x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2 \ \vee \ x=2$

$B=\{2\}$

$B \backslash A=\bar{A} \cap B=\{-1,0,1,2\} \cap \{2\}=\{2\}$

2.

2.1. $P(x)=x^3+2x^2-4x+5$

$$P\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^3+2\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2-4\times\frac{1}{1+\sqrt{2}}+5=$$

$$=\left(\frac{1}{1+\sqrt{2}}\right)^2\times\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{1+2\sqrt{2}+2}-\frac{4}{1+\sqrt{2}}\times\frac{1-\sqrt{2}}{1-\sqrt{2}}+5=$$

$$=\frac{1}{3+2\sqrt{2}}\times\frac{1}{1+\sqrt{2}}+\frac{2}{3+2\sqrt{2}}-\frac{4-4\sqrt{2}}{1-2}+5=$$

$$=\frac{1}{3+3\sqrt{2}+2\sqrt{2}+4}+\frac{2}{3+2\sqrt{2}}\times\frac{3-2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}+4-4\sqrt{2}+5=$$

$$=\frac{1}{7+5\sqrt{2}}\times\frac{7-5\sqrt{2}}{7-5\sqrt{2}}+\frac{6-4\sqrt{2}}{9-8}+9-4\sqrt{2}=$$

$$=\frac{7-5\sqrt{2}}{49-50}+6-4\sqrt{2}+9-4\sqrt{2}=$$

$$=-7+5\sqrt{2}+6-4\sqrt{2}+9-4\sqrt{2}=$$

$$=8-3\sqrt{2}$$

2.2. Pelo Teorema do Resto, sabemos que $P(-2)=-3$. Pela definição de raiz de um polinómio, sabemos que $P(1)=0$.

$$\begin{cases} P(-2)=-3 \\ P(1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8a-4b+8+5=-3 \\ a-b-4+5=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8(b-1)-4b=-16 \\ a=b-1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8b+8-4b=-16 \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -12b=-24 \\ - \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b=2 \\ a=1 \end{cases}$$

2.3. $P(x) = -2x^3 - 11x^2 - 4x + 5$

O termo independente é 5 e os seus divisores inteiros são -1, 1, -5 e 5. Assim, as possíveis raízes inteiras de $P(x)$ são -1, 1, -5 e 5.

$P(-1) = 2 - 11 + 4 + 5 = 0$

Assim:

$$\begin{array}{c|cccc} & -2 & -11 & -4 & 5 \\ -1 & & 2 & 9 & -5 \\ \hline & -2 & -9 & 5 & \boxed{0} \end{array}$$

Logo, $P(x) = (x+1)(-2x^2 - 9x + 5)$.

$-2x^2 - 9x + 5 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{9 \pm \sqrt{81+40}}{-4}$

$\Leftrightarrow x = \frac{-9 \pm 11}{4}$

$\Leftrightarrow x = -5 \vee x = \frac{1}{2}$

Logo, $P(x) = -2(x+1)(x+5)\left(x - \frac{1}{2}\right)$.

x	$-\infty$	-5		-1		$\frac{1}{2}$	$+\infty$
$-2(x+1)$	+	+	+	0	−	−	−
$x+5$	−	0	+	+	+	+	+
$x - \frac{1}{2}$	−	−	−	−	−	0	+
$P(x)$	+	0	−	0	+	0	−

C.S. $= [-5, -1] \cup \left[\frac{1}{2}, +\infty\right[$

3.

3.1. $x^2 + y^2 - 4x - 10y = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 - 10y + 25 = 4 + 25$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-5)^2 = 29$

Assim, o centro da circunferência tem coordenadas (2, 5) e o seu raio é $\sqrt{29}$.

3.2. $A(-3, 7)$

$\overrightarrow{OA}(-3, 7)$

$m_r = -\frac{7}{3}$

O ponto $O(0, 0)$ pertence à reta r. Logo, r: $y = -\frac{7}{3}x$.

Assim, uma condição que define a região sombreada é:

$(x-2)^2 + (y-5)^2 \leq 29 \wedge \left(y \geq 7 \vee y \leq -\frac{7}{3}x\right)$

3.3. $(x+3)^2 + (y-7)^2 = (x-2)^2 + (y+5)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 6x + 9 + y^2 - 14y + 49 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 10y + 25$

$\Leftrightarrow -24y = -10x - 29$

$\Leftrightarrow y = \frac{10}{24}x + \frac{29}{24}$

$\Leftrightarrow y = \frac{5}{12}x + \frac{29}{24}$

4.

4.1. O ponto B é o ponto de interseção das retas AB e BC.

AB: $(x, y) = (1, 3) + k(4, 1), k \in \mathbb{R}$

Logo, os pontos da reta AB são da forma $(1 + 4k, 3 + k), k \in \mathbb{R}$.

AC: $4x + y = 24$

Substituindo, vem:

$4(1 + 4k) + 3 + k = 24 \Leftrightarrow 4 + 16k + 3 + k = 24$

$\Leftrightarrow 17k = 17$

$\Leftrightarrow k = 1$

Logo, $B(5, 4)$.

4.2. $C(x, 0), x > 0$

$C \in BC$, logo $4x + 0 = 24 \Leftrightarrow x = 6$

Assim, $C(6, 0)$.

CD é paralela a AB, que tem como vetor diretor o vetor de coordenadas (4, 1).

Assim, uma equação vetorial da reta CD é $(x, y) = (6, 0) + k(4, 1), k \in \mathbb{R}$.