Proposta de teste de avaliação

Matemática A

11.º ANO DE ESCOLARIDADE

Duração: 90 minutos **|** **Data:**

CADERNO I (60 minutos – com calculadora)

1. Considere um plano em que está fixado um referencial ortonormado xOy, os vetores $\vec{u}\left(1, -\sqrt{3}\right)$ e $\vec{v}\left(k^2, \sqrt{3}\right)$ sendo k um número real.

O conjunto dos valores de k para os quais o ângulo dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ é obtuso é:

(A) $k \in \left\{-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right\}$ **(B)** $k \in \left]-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right[$

(C) $k \in \left]-\infty, -\sqrt{3}\right[\cup \left]\sqrt{3}, +\infty\right[$ **(D)** $k \in \varnothing$

2. Considere, num referencial o.n. $Oxyz$, o plano α definido pela equação $2x-2y-2z=1$, e a reta r dada por:

$$(x, y, z) = (1, 2, 3) + k(-1, 1, 0),\ k \in \mathbb{R}$$

A interseção do plano α com a reta r é:

(A) A reta r **(B)** O conjunto vazio

(C) Um ponto **(D)** O plano α

3. Considere as afirmações:

(I) $\sum_{n=1}^{10} (2n-1) = 100$

(II) Sejam $\frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{5}{9}, \frac{7}{12}$ os quatro primeiros termos de uma sucessão (u_n). O termo geral da sucessão pode ser $u_n = \frac{2n+1}{3n}$.

Quanto à veracidade destas afirmações, pode-se concluir que:

(A) Ambas as afirmações são falsas. **(B)** Ambas as afirmações são verdadeiras.

(C) **(I)** é falsa e **(II)** é verdadeira. **(D)** **(I)** é verdadeira e **(II)** é falsa.

4. Uma sucessão (u_n) satisfaz a seguinte condição:

$$u_n = n^2 + u_n - 2$$

Podemos afirmar que:

(A) (u_n) é uma progressão aritmética. **(B)** (u_n) é uma progressão geométrica.

(C) (u_n) é estritamente crescente. **(D)** (u_n) não é monótona.

5. Sejam (u_n), (v_n) e (w_n) as sucessões definidas por:

$$u_n = \frac{1-n}{n}, \qquad w_n = \arctan n \qquad \text{e} \qquad v_n : \begin{cases} v_1 = 2 \\ v_{n+1} = \frac{2v_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

5.1. Estude a sucessão (u_n) quanto à monotonia.

5.2. Prove, utilizando a definição de limite, que $\lim u_n = -1$.

5.3. A sucessão (w_n) é limitada? Justifique a resposta.

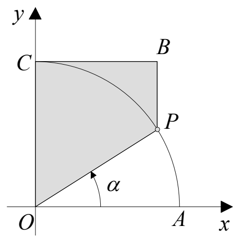
5.4. Mostre que $v_n = 2^n \times 3^{1-n}, \forall n \in \mathbb{N}$.

5.5. Calcula $\lim S_n$, sendo S_n a soma dos n primeiros termos da sucessão (v_n).

6. Na figura está representada parte da circunferência trigonométrica.

Sabe-se que:

- os pontos A e C têm coordenadas $(1,\, 0)$ e $(0,\, 1)$, respetivamente;
- o ponto P desloca-se sobre o arco AC ;
- as retas PB e CB são paralelas aos eixos Oy e Ox, respetivamente;
- para cada posição do ponto P seja α a amplitude do ângulo AOP $\left(\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[\right)$.



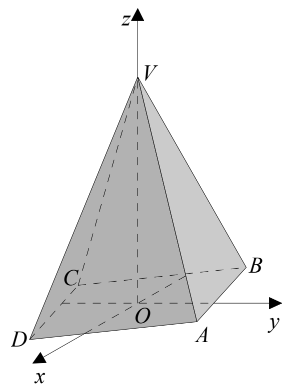
6.1. Mostre que a área do trapézio $[OPBC]$ é dada, em função de α , por $A(\alpha) = \cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$.

6.2. Determine a medida da área do trapézio $[OPBC]$ sabendo que $\overline{PB} + \overline{BC} = 1$.

7. Na figura está representada, num referencial o.n. $Oxyz$, a pirâmide quadrangular regular $[ABCDV]$.

Sabe-se que:

- a base $[ABCD]$ está contida no plano xOy e tem o centro na origem do referencial;
- o plano DAV pode ser definido pela equação $3x + y + z - 5 = 0$;
- r é a reta que passa na origem do referencial e é perpendicular ao plano DAV .



7.1. Sabendo que o ponto A tem abcissa igual a 1, mostre que tem ordenada igual a 2.

7.2. Mostre que o ponto D tem coordenadas $(2, -1,\, 0)$.

7.3. Determine uma equação vetorial da reta r e as coordenadas do ponto de interseção desta reta com o plano DAV.

7.4. Identifique e defina por uma equação cartesiana o lugar geométrico dos pontos $P(x, y, z)$ tais que $\overrightarrow{DV} \cdot \overrightarrow{MP} = 0$, sendo M o ponto médio de $[DV]$.

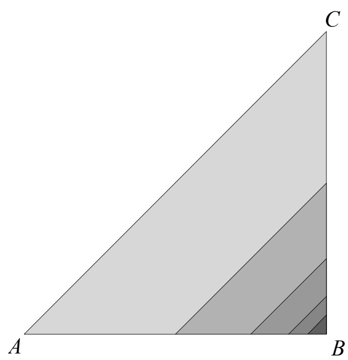
8. A figura representada é constituída por uma sucessão (T_n) de triângulos retângulos em B e isósceles.

Relativamente a T_1, triângulo $[ABC]$, sabe-se que $\overline{AC} = 2\sqrt{2}$.

A medida dos lados de cada um dos triângulos seguintes é igual a metade da medida dos lados correspondentes do triângulo precedente.

Seja (A_n) a sucessão das medidas das áreas dos triângulos T_n que se podem formar utilizando o processo indicado.

Justifique que (A_n) é uma progressão geométrica e determine uma expressão simplificada do seu termo geral.



CADERNO II (30 minutos – sem calculadora)

1. Resolva no intervalo $[0, 3\pi[$ a seguinte equação:

$$\sin^2\left(\frac{x}{3}\right) = \sin\left(\frac{x}{3}\right)$$

2. Determine os seguintes limites:

2.1. $\lim\left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^{\frac{1}{2}}$

2.2. $\lim\frac{2n-25}{5+\sqrt{2n}}$

3. Determine a soma dos 20 primeiros termos da sucessão (u_n) tal que:

$$u_5 = -21 \quad \text{e} \quad u_{n+1} = -5 + u_n \text{ , } \forall n \in \mathbb{N}$$

4. Considere a função f definida em $\mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-1}{x-1} & \text{se } x < 1 \\ 1 & \text{se } x = 1 \\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} & \text{se } x > 1 \end{cases}$$

4.1. Determine $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$.

4.2. A função f é contínua no ponto 1? Justifique.

5. Considere as sucessões (a_n) e (b_n) tais que:

$$a_n = 3^{-n} \qquad \text{e} \qquad b_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{4}$$

Mostre que: $\lim\frac{\sum\limits_{i=1}^{n} a_n}{\sum\limits_{i=1}^{n} b_n} = 1$

FIM

Cotações

Caderno I

1	2	3	4	5.1.	5.2.	5.3.	5.4.	5.5.	6.1.	6.2.	7.1.	7.2.	7.3.	7.4.	8	Total
8	8	8	8	10	10	9	9	9	9	9	7	10	10	7	9	**140**

Caderno II

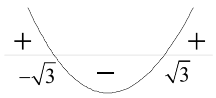
1	2.1.	2.2.	3	4.1.	4.2.	5	Total
10	8	8	8	8	8	10	**60**

Propostas de resolução

CADERNO I

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} < 0 \Leftrightarrow \left(1,\ -\sqrt{3}\right) \cdot \left(k^2,\ \sqrt{3}\right) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow k^2 - 3 < 0 \Leftrightarrow k \in \left]-\sqrt{3},\ \sqrt{3}\right[$



Resposta: (B)

2. $\vec{r}\left(-1, 1, 0\right)$ é um vetor diretor da reta r.

$\vec{u}\left(2, -2, -2\right)$ é um vetor normal a α.

Como $\vec{u} \cdot \vec{r} = -2 - 2 + 0 \neq 0$, a reta r não é paralela ao plano α. Logo, a interseção de r com α é um ponto.

Resposta: (C)

3. **I.** $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}\left(2n-1\right) = \frac{\left(2\times1-1\right)+\left(2\times10-1\right)}{2}\times10 = \frac{1+19}{2}\times10 = 100$ (Verdadeira)

II. $\dfrac{1}{3}, \dfrac{1}{2}, \dfrac{5}{9}, \dfrac{7}{12}$

$u_1 = \dfrac{2\times1+1}{3\times1} = \dfrac{3}{3} = 1 \neq \dfrac{1}{3}$ (Falsa)

Resposta: (D)

4. $u_{n+1} - u_n = n^2 + u_n - 2 - u_n = n^2 - 2$

$u_{n+1} - u_n > 0$, para $n > 1$

Para $n = 1$, $u_2 - u_1 = -1 < 0$.

Portanto, $\left(u_n\right)$ não é monótona.

Resposta: (D)

5.1. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1-\left(n+1\right)}{n+1} - \dfrac{1-n}{n} = \dfrac{-n}{n+1} - \dfrac{1-n}{n} = \dfrac{-n^2 - n + n^2 - 1 + n}{n\left(n+1\right)} = -\dfrac{1}{n\left(n+1\right)} < 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$

$u_{n+1} - u_n < 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Logo, $\left(u_n\right)$ é monótona decrescente.

5.2. $\lim u_n = -1 \Leftrightarrow \lim \dfrac{1-n}{n} = -1$

Seja δ um número real positivo qualquer.

$\left|\dfrac{1-n}{n} - \left(-1\right)\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\dfrac{1-n+n}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \left|\dfrac{1}{n}\right| < \delta \Leftrightarrow \dfrac{1}{n} < \delta \Leftrightarrow n > \dfrac{1}{\delta}$

Para cada $\delta > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq p \Rightarrow \left|u_n - \left(-1\right)\right| < \delta$, sendo p um número natural tal que $p > \dfrac{1}{\delta}$.

Portanto, $\lim u_n = -1$.

5.3. $w_n = \arctan n$

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan n < \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < w_n < \frac{\pi}{2}$$

Logo, (w_n) é limitada.

5.4. $v_{n+1} = \frac{2v_n}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \Leftrightarrow \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{2}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$

(v_n) é uma progressão geométrica de razão $\frac{2}{3}$.

$v_1 = 2$

$$v_n = v_1 \times r^{n-1} = 2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} = 2 \times \frac{2^{n-1}}{3^{n-1}} = 2^n \times \frac{1}{3^{n-1}} = 2^n \times 3^{1-n}$$

$v_n = 2^n \times 3^{1-n}$, $\forall n \in \mathbb{N}$

5.5. $S_n = v_1 \times \frac{1-r^n}{1-r} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{1-\frac{2}{3}} = 2 \times \frac{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n}{\frac{1}{3}} = 6 \times \left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right]$

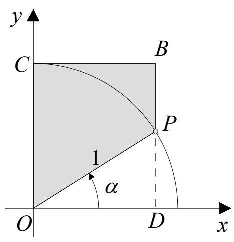
$$\lim S_n = \lim\left[6 \times \left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right)\right] = 6 \times \lim\left(1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right) = 6 \times (1-0) = 6$$

6.1. $\overline{BC} = \overline{OD} = \cos\alpha$

$\overline{PB} = 1 - \overline{DP} = 1 - \sin\alpha$

$\overline{OC} = \overline{BC} = 1$

$A_{[OPBC]} = \frac{\overline{OC} + \overline{PB}}{2} \times \overline{BC}$



$$A(\alpha) = \frac{1+1-\sin\alpha}{2} \times \cos\alpha = \left(1 - \frac{1}{2}\sin\alpha\right) \times \cos\alpha = \cos\alpha - \frac{1}{2}\sin\alpha\cos\alpha$$

6.2. $\overline{PB} + \overline{BC} = 1 \Leftrightarrow 1 - \sin\alpha + \cos\alpha = 1 \Leftrightarrow \cos\alpha = \sin\alpha$

Como $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, $\cos\alpha = \sin\alpha \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$

$$A\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4} =$$

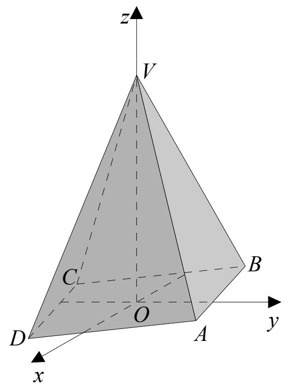
$$= \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2\sqrt{2}-1}{4}$$

7.1. $DAV: 3x+y+z-5=0$

$A(1, y, 0)$ pertence ao plano DAV:

$3\times 1+y+0-5=0 \Leftrightarrow y=2$

$A(1, 2, 0)$



7.2. $D(x, y, 0)$ pertence ao plano DAV:

$3x+y+0-5=0 \Leftrightarrow y=5-3x$

$D(x, 5-3x, 0)$

Como [*ABCD*] é um quadrado com centro em *O*, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OD}$.

$\overrightarrow{OA}(1, 2, 0)$

$\overrightarrow{OD}(x, 5-3x, 0)$

$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OD}=0 \Leftrightarrow (1, 2, 0)\cdot(x, 5-3x, 0)=0 \Leftrightarrow x-10-6x+0=0 \Leftrightarrow 5x=10 \Leftrightarrow x=2$

$y=5-3x=5-3\times 2=-1$

$D(2, -1, 0)$

7.3. $\vec{u}=(3, 1, 1)$ é um vetor normal ao plano *DAV*. Logo, $\vec{u}$ é um vetor diretor da reta *r*.

Como a reta *r* passa na origem, temos:

$r: (x, y, z)=(0, 0, 0)+k(3, 1, 1), k\in\mathbb{R}$

ou

$r: (x, y, z)=k(3, 1, 1), k\in\mathbb{R}$

Ponto genérico da reta *r*: $R(3k, k, k), k\in\mathbb{R}$

Pretendemos determinar o ponto da reta *r* que pertence ao plano $DAV: 3x+y+z-5=0$

Substituindo as coordenadas de *R* na equação do plano, vem:

$3\times(3k)+k+k-5=0 \Leftrightarrow 9k+2k=5 \Leftrightarrow k=\frac{5}{11}$

Portanto, a reta *r* interseta o plano *DAV* no ponto $\left(\frac{15}{11}, \frac{5}{11}, \frac{5}{11}\right)$.

7.4. O lugar geométrico dos pontos *P*(*x*, *y*, *z*) tais que $\overrightarrow{DV}\cdot\overrightarrow{MP}=0$ é o plano mediador de $[DV]$.

Como $V(0, 0, z)$ pertence ao plano *DAV*, temos: $0+0+z-5=0 \Leftrightarrow z=5$

$V(0, 0, 5)$; $D(2, -1, 0)$ e $M\left(\frac{0+2}{2}, \frac{0-1}{2}, \frac{5+0}{2}\right)$ ou $M\left(1, -\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$

$P(x, y, z)$

$\overrightarrow{DV}=V-D=(-2, 1, 5)$

$\overrightarrow{MP}=P-M=\left(x-1, y+\frac{1}{2}, z-\frac{5}{2}\right)$

$\overrightarrow{DV}\cdot\overrightarrow{MP}=0 \Leftrightarrow (-2, 1, 5)\cdot\left(x-1, y+\frac{1}{2}, z-\frac{5}{2}\right)=0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -2x+2+y+\frac{1}{2}+5z-\frac{25}{2}=0 \Leftrightarrow 2x-y-5z+10=0$

8. $\overline{BC}^2 + \overline{AB}^2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2 \Leftrightarrow 2\overline{BC}^2 = 8 \Leftrightarrow \overline{BC}^2 = 4 \underset{\overline{BC}>0}{\Leftrightarrow} \overline{BC} = 2$

$A_1 = \frac{2\times 2}{2} = 2$ u.a.

$A_2 = \frac{1\times 1}{2} = \frac{1}{2}$ u.a.

$A_3 = \frac{\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$ u.a.

$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} = \ldots = \frac{1}{4}$

$\left(A_n\right)$ é uma progressão geométrica de razão $\frac{1}{4}$.

$A_n = A_1 \times r^{n-1} = 2\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1} = 2\times\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^{n-1} = 2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-2} = 2\times 2^{2-2n} = 2^{3-2n}$

Ou

Pelo processo descrito podemos concluir qua as dimensões dos triângulos estão em progressão geométrica de razão $\frac{1}{2}$. Logo, as áreas correspondentes estão em progressão geométrica de razão $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.

Caderno II

1. $\sin^2\frac{x}{3} = \sin\frac{x}{3} \Leftrightarrow \sin^2\frac{x}{3} - \sin\frac{x}{3} = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{3}\left(\sin\frac{x}{3} - 1\right) = 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \sin\frac{x}{3} = 0 \vee \sin\frac{x}{3} = 1 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{x}{3} = k\pi \vee \frac{x}{3} = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x = 3k\pi \vee x = \frac{3}{2}\pi + 6k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$

No intervalo $\left[0, 3\pi\right[$:

De $x = 3k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, obtemos $x = 0$.

De $x = \frac{3}{2}\pi + 6k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$, obtemos $x = \frac{3}{2}\pi$.

$S = \left\{0,\ \frac{3}{2}\pi\right\}$

2.1. $\lim\left(\frac{n+1}{4n+3}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim\sqrt{\frac{n+1}{4n+3}}=\sqrt{\lim\frac{n+1}{4n+3}}=\sqrt{\lim\frac{n}{4n}}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$

2.2. $\lim\frac{2n-25}{5+\sqrt{2n}}\overset{\left(\frac{\infty}{\infty}\right)}{=}\lim\frac{(2n-25)\left(5-\sqrt{2n}\right)}{\left(5+\sqrt{2n}\right)\left(5-\sqrt{2n}\right)}=\lim\frac{(2n-25)\left(5-\sqrt{2n}\right)}{25-2n}$

$=\lim\frac{\cancel{(2n-25)}\left(5+\sqrt{2n}\right)}{-\cancel{(2n-25)}}=\lim\frac{\left(5-\sqrt{2n}\right)}{-1}=$

$=\lim\left(-5+\sqrt{2n}\right)=-5+\infty=+\infty$

3. $u_{n+1}=-5+u_n\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\Leftrightarrow u_{n+1}-u_n=-5,\ \forall n\in\mathbb{N}$

(u_n) é uma progressão aritmética de razão $r=-5$

$u_5=u_1+4r\Leftrightarrow -21=u_1-20\Leftrightarrow u_1=-1$

$u_{20}=u_1+19r=-1+19\times(-5)=-1-95=-96$

$S_{20}=\frac{-1+(-96)}{2}\times 20=-970$

4. $f(x)=\begin{cases}\frac{x^3-1}{x-1} & \text{se } x<1\\ 1 & \text{se } x=1\\ \frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}} & \text{se } x>1\end{cases}$

4.1. $\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}-1}{x-\sqrt{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}{\left(x-\sqrt{x}\right)\left(x+\sqrt{x}\right)}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{x}+x-x-\sqrt{x}}{x^2-x}=$

$\lim\limits_{x\to1^+}\frac{x\sqrt{x}-\sqrt{x}}{x^2-x}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}(x-1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to1^+}\frac{\sqrt{x}}{x}=1$

4.2. f é contínua no ponto 1 se $\lim\limits_{x\to1}f(x)$ existir.

Já sabemos que $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=1=f(1)$. Falta verificar se $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=1$.

$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^3-1}{x-1}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}$

$=\lim\limits_{x\to1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^2+x+1\right)}{\cancel{(x-1)}}=3$

Cálculo auxiliar

	1	0	0	–1
1		1	1	1
	1	1	1	0

Como $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)\neq\lim\limits_{x\to1^+}f(x)$, não existe $\lim\limits_{x\to1}f(x)$.

Logo, f não é contínua no ponto 1.

5. $a_n = 3^{-n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{-(n+1)}}{3^{-n}} = 3^{-n-1+n} = \frac{1}{3}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = 3^{-1} = \frac{1}{3}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{3}$.

$$\lim \sum_{i=1}^{n} a_n = \lim\left(a_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left[\frac{1}{3} \times \frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}}\right] =$$

$$= \frac{1}{3} \times \frac{3}{2} \times \left[1 - \lim\left(\frac{1}{3}\right)^n\right] = \frac{1}{2}(1-0) = \frac{1}{2}$$

$$b_n = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{4} = 4^{-1} \times 2^{1-n} = 2^{-2} \times 2^{1-n} = 2^{-1-n}$$

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2^{-1-(n+1)}}{2^{-1-n}} = 2^{-1-n-1+1+n} = \frac{1}{2}, \forall n \in \mathbb{N}$$

$$a_1 = 2^{-2} = \frac{1}{4}$$

(a_n) é uma progressão geométrica de razão $r = \frac{1}{2}$.

$$\lim \sum_{i=1}^{n} b_n = \lim\left(b_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}\right) = \lim\left[\frac{1}{4} \times \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{4} \times 2 \times \left[1 - \lim\left(\frac{1}{2}\right)^n\right] = \frac{2}{4}(1-0) = \frac{1}{2}$$

Portanto, $\lim \frac{\sum_{i=1}^{n} a_n}{\sum_{i=1}^{n} b_n} = \frac{\lim \sum_{i=1}^{n} a_n}{\lim \sum_{i=1}^{n} b_n} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = 1$.