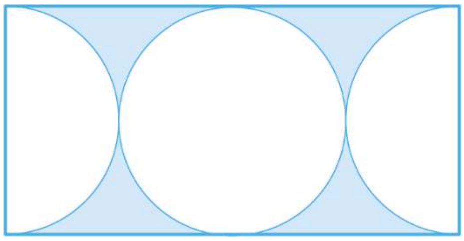
Novo Espaço – Matemática A, 10.º ano
Apoio à avaliação [outubro – 2023]

Nome: ____

Ano / Turma: __________ **N.º:** _____ **Data:** ____ - ____ - ____

1. Na figura está representado um retângulo no qual foram inscritos um círculo e dois semicírculos, todos com o mesmo raio r. Qual será, em função de r, a medida da área da região colorida?



(A) $2r(4-2\pi)$ **(B)** $r^2(4-\pi)$ **(C)** $2r^2(4-\pi)$ **(D)** $2r^2(2-\pi)$

2. Considera um triângulo $[ABC]$, retângulo em B, com 3 unidades de área.

Determina o valor exato de $\overline{BC}$, sabendo que $\overline{AB} = 4-\sqrt{6}$.

Apresenta o resultado na forma simplificada, com denominador racional.

3. Na figura está representado um painel retangular que é constituído por 21 azulejos quadrados. A área de cada azulejo é igual a $232\ \text{cm}^2$.

Qual é, em centímetros, a medida de cada diagonal do painel?

(A) 116 **(B)** 114 **(C)** 115,8 **(D)** 115

4. Num referencial o.n. Oxy considera o ponto $P(k^2-2k, k+4)$, $k \in \mathbb{R}$.

Determina os valores de k para os quais:

4.1. o ponto P pertence ao eixo Oy;

4.2. o ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares;

4.3. o ponto P pertence à reta que passa pelo ponto $A(-3, 7)$ e é paralela ao eixo das abcissas.

5. Num referencial o.n. Oxy, considera o ponto $P(6-2k, k-5)$, $k \in \mathbb{R}$. Qual das condições representa os valores de k para que o ponto P pertença ao 4.º quadrante?

(A) $k<3$ **(B)** $k<5$ **(C)** $k<3 \vee k>5$ **(D)** $3<k<5$

6. Num referencial o.n. Oxy, considera a circunferência de equação $(x-2)^2+(y+1)^2=3$ e os pontos $A(1,2)$ e $B(3,0)$.

6.1. Em relação à circunferência dada, indica a opção correta.

(A) Centro $(2,1)$ e raio 3

(B) Centro $(-2,1)$ e raio $\sqrt{3}$

(C) Centro $(2,-1)$ e raio $\sqrt{3}$

(D) Centro $(2,-1)$ e raio 3

6.2. Determina, analiticamente, a posição do ponto A relativamente à circunferência.

6.3. Classifica, quanto aos lados, o triângulo $[AOB]$.

6.4. Determina a equação cartesiana da circunferência de diâmetro $[AB]$.

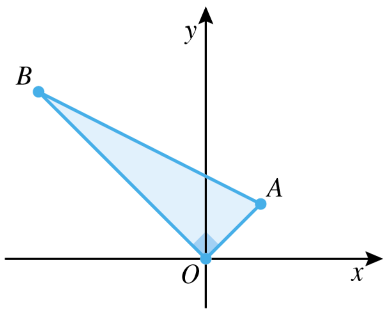
6.5. Relativamente a um ponto P do 4.º quadrante, sabe-se que P pertence à reta AB e que $\overline{AP}=4\sqrt{2}$. Determina as coordenadas do ponto P.

7. Representa, num referencial, o seguinte conjunto de pontos:

$$A=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9 \quad \wedge \quad \left(|x|\geq 1 \vee |y|\geq 2\right)\right\}$$

8. Num referencial o.n. Oxy, considera o triângulo retângulo $[OAB]$ cuja medida da área é 3 e é tal que:

- o ponto A pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares;
- o ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes pares;
- a ordenada do ponto B excede em 2 unidades a ordenada do ponto A.



Determina as coordenadas dos pontos A e B.

FIM

Cotações

Questões	1.	2.	3.	4.1.	4.2.	4.3.	5.	
Cotação (pontos)	12	14	12	16	16	16	12	
Questões	**6.1.**	**6.2.**	**6.3.**	**6.4.**	**6.5.**	**7.**	**8.**	**Total**
Cotação (pontos)	12	14	16	16	16	16	12	**200**

1.

$A_{\text{retângulo}} = 4r \times 2r = 8r^2$

$A_{\text{círculo}} = \pi r^2$

$2 \times A_{\text{círculo}} = 2\pi r^2$

$A_{\text{região}} = 8r^2 - 2\pi r^2 = 2r^2(4-\pi)$

Opção (C)

2.

$$A_{\text{triângulo}} = 3 \Leftrightarrow \frac{\left(4-\sqrt{6}\right)\times \overline{BC}}{2} = 3$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6}{4-\sqrt{6}}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6\left(4+\sqrt{6}\right)}{\left(4-\sqrt{6}\right)\left(4+\sqrt{6}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{6\left(4+\sqrt{6}\right)}{10}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{3\left(4+\sqrt{6}\right)}{5}$$

$$\Leftrightarrow \overline{BC} = \frac{12+3\sqrt{6}}{5}$$

3. Medida do lado de cada azulejo: $\sqrt{232}$

Medidas dos lados do painel: $7\sqrt{232}$ e $3\sqrt{232}$

Seja d a medida da diagonal e aplicando o Teorema de Pitágoras:

$$d^2 = \sqrt{\left(7\sqrt{232}\right)^2 + \left(3\sqrt{232}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \sqrt{49\times 232 + 9\times 232}$$

$$\Leftrightarrow d^2 = \sqrt{13456}$$

$$\Leftrightarrow d = 116$$

Opção (A)

4. $P\left(k^2-2k, k+4\right)$, $k \in \mathbb{R}$

4.1. $P \in Oy \Leftrightarrow k^2-2k=0 \Leftrightarrow k\left(k-2\right)=0 \Leftrightarrow k=0 \vee k=2$

$k \in \{0, 2\}$

4.2. A bissetriz dos quadrantes ímpares é definida pela reta de equação $y=x$.

O ponto P pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares se tiver abcissa igual à ordenada.

$$
\begin{aligned}
k^2-2k=k+4 &\Leftrightarrow k^2-3k-4=0 \\
&\Leftrightarrow k=\frac{3\pm\sqrt{(-3)^2-4\times1\times(-4)}}{2\times1} \\
&\Leftrightarrow k=-1 \vee k=4
\end{aligned}
$$

$k \in \{-1, 4\}$

4.3. Sabe-se que o ponto P pertence à reta que passa pelo ponto $A(-3, 7)$ e é paralela ao eixo das abcissas. Então, P pertence à reta de equação $y=7$.

$k+4=7 \Leftrightarrow k=3$

$k \in \{3\}$

5.

$$
\begin{aligned}
P(6-2k, k-5) \in 4.^{\circ}\text{Q} &\Leftrightarrow 6-2k>0 \wedge k-5<0 \\
&\Leftrightarrow -2k>-6 \wedge k<5 \\
&\Leftrightarrow k<3 \wedge k<5 \\
&\Leftrightarrow k<3
\end{aligned}
$$

Opção (A)

6.

6.1. A equação define uma circunferência de centro $C(2,-1)$ e raio $\sqrt{3}$.

Opção (C)

6.2. Seja $C(2,-1)$ o centro da circunferência e $A(1,2)$.

$\overline{AC}=\sqrt{(1-2)^2+(2+1)^2}=\sqrt{10}>\sqrt{3}$

O ponto A é exterior à circunferência de centro $C(2,-1)$ e raio $\sqrt{3}$.

6.3. $\overline{OA}=\sqrt{(1-0)^2+(2-0)^2}=\sqrt{5}$

$\overline{OB}=3$

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Como as medidas dos lados do triângulo são todas diferentes, o triângulo é escaleno.

6.4. A circunferência de diâmetro $[AB]$ tem centro no ponto médio de $[AB]$ e raio igual a $\frac{\overline{AB}}{2}$.

$$M_{[AB]}=\left(\frac{1+3}{2},\frac{2+0}{2}\right)=(2,1)$$

$$\overline{AB}=\sqrt{(3-1)^2+(0-2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

$$\frac{\overline{AB}}{2}=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}$$

Assim, a equação cartesiana da circunferência pedida é: $(x-2)^2+(y-1)^2=2$

6.5. Vamos começar por definir, analiticamente, a reta *AB*.

Declive da reta *AB*: $m=\frac{0-2}{3-1}=-1$

$y=mx+b$

$y=-x+b$

Como $B(3,0)\in AB$, então:

$0=-3+b\Leftrightarrow b=3$

$\therefore\quad AB: y=-x+3$

Como $P\in AB$, então P tem coordenadas do tipo $P(x,-x+3)$.

$$\begin{aligned}\overline{AP}=4\sqrt{2}&\Leftrightarrow\sqrt{(x-1)^2+(-x+3-2)^2}=\sqrt{32}\\&\Leftrightarrow(x-1)^2+(-x+1)^2=32\\&\Leftrightarrow x^2-2x+1+x^2-2x+1=32\\&\Leftrightarrow 2x^2-4x-30=0\Leftrightarrow x^2-2x-15=0\\&\Leftrightarrow x=\frac{2\pm\sqrt{(-2)^2-4\times1\times(-15)}}{2}\\&\Leftrightarrow x=-3\vee x=5\end{aligned}$$

Como $P\in 4.^{\text{o}}Q$ vem que $x>0$, isto é, $x=5$.

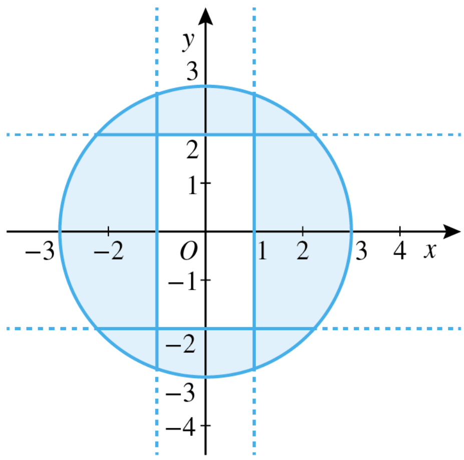
Logo, $(x,-x+3)=(5,-5+3)=(5,-2)$, ou seja, $P(5,-2)$.

7. $A=\left\{(x,y)\in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2\leq 9 \wedge \left(|x|\geq 1 \vee |y|\geq 2\right)\right\}$

$x^2+y^2\leq 9$ define um círculo de centro na origem e raio 3

$|x|\geq 1 \Leftrightarrow x\geq 1 \vee x\leq -1$

$|y|\geq 2 \Leftrightarrow y\geq 2 \vee y\leq -2$



8. Seja $a\in \mathbb{R}^+$ a abcissa do ponto A.

A equação da bissetriz dos quadrantes ímpares é $y=x$.

O ponto A pertence à bissetriz dos quadrantes ímpares, pelo que $A(a,a)$.

A ordenada do ponto *B* excede em 2 unidades a ordenada do ponto *A*, então $y_B=a+2$.

A equação da bissetriz dos quadrantes pares é $y=-x$.

O ponto B pertence à bissetriz dos quadrantes pares, pelo que $B(-a-2,a+2)$.

$$\overline{OA}=\sqrt{(a-0)^2+(a-0)^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}\underset{a>0}{=}\sqrt{2}a$$

$$\overline{OB}=\sqrt{(a+2-0)^2+(-a-2-0)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(-a-2)^2}=\sqrt{(a+2)^2+(a+2)^2}=$$

$$=\sqrt{2(a+2)^2}\underset{a>0}{=}\sqrt{2}(a+2)$$

$$A_{[AOB]}=3\Leftrightarrow \frac{\overline{OA}\times\overline{OB}}{2}=3\Leftrightarrow \frac{\sqrt{2}a\times\sqrt{2}(a+2)}{2}=3\Leftrightarrow a(a+2)=3\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^2+2a-3=0\Leftrightarrow a=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\times1\times(-3)}}{2\times1}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a=1\vee a=-3$$

Como $a>0$, $a=1$.

Assim, $A(1,1)$ e $B(-3,3)$.