Resolução do Trabalho 2010/11 da GA4

UC: Optimização

Docente: Rosário Laureano

1. (a) Dada a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x-1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n}{n!}(x-1)^n,$$

o uso do critério da razão de D'Alemberg exige o cálculo do limite

$$\begin{aligned}
\lim_n \left| \frac{u_{n+1}(x-1)}{u_n(x-1)} \right| &= \lim_n \left| \frac{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}(x-1)^{n+1}}{\dfrac{3^n}{n!}(x-1)^n} \right| \\
&= \lim_n \left| \frac{3^{n+1}\cdot(x-1)^{n+1}\cdot n!}{3^n\cdot(x-1)^n\cdot(n+1)!} \right| \\
&= \lim_n \left| \frac{3^n\cdot 3\cdot(x-1)^n\cdot(x-1)\cdot n!}{3^n\cdot(x-1)^n\cdot n!\cdot(n+1)} \right| \\
&= \lim_n \left| \frac{3\cdot(x-1)}{n+1} \right| = \lim_n \frac{3\cdot|x-1|}{n+1} \\
&= 3\cdot|x-1|\cdot\lim_n \frac{1}{n+1} = 3\cdot|x-1|\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

Como $\lim_n \left| \dfrac{u_{n+1}(x-1)}{u_n(x-1)} \right| = 0 < 1$ para todo o $x \in \mathbb{R}$, então a série de potências é convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$ e a convergência é absoluta. Tal significa que o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$.

<u>ALTERNATIVA</u> (Cálculo do raio de convergência) Temos $v_n = 3^n/n!$ como a "parte" do termo geral que não depende de x. Cal-

culemos o raio de convergência pelo limite

$$\begin{aligned} R &= \lim_n \left| \frac{v_n}{v_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{\dfrac{3^n}{n!}}{\dfrac{3^{n+1}}{(n+1)!}} \right| = \lim_n \left| \frac{3^n \cdot (n+1)!}{n! \cdot 3^{n+1}} \right| \\ &= \lim_n \frac{3^n \cdot (n+1) \cdot n!}{n! \cdot 3^n \cdot 3} = \lim_n \frac{n+1}{3} = \frac{+\infty}{3} = +\infty. \end{aligned}$$

Sendo o raio de convergência da série de potências $R = +\infty$, o domínio de convergência é $D = \mathbb{R}$ e, para todos os valores de $x \in \mathbb{R}$, a convergência é absoluta.

(b) Dada a série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n (x+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot (x+2)^n \right],$$

o uso do critério da razãode D'Alemberg exige o cálculo do limite

$$\begin{aligned} \lim_n \left| \frac{u_{n+1}(x+2)}{u_n(x+2)} \right| &= \lim_n \left| \frac{(n+1)^2 \cdot (x+2)^{n+1}}{n^2 \cdot (x+2)^n} \right| \\ &= \lim_n \left| \frac{(n+1)^2 \cdot (x+2)^n \cdot (x+2)}{n^2 \cdot (x+2)^n} \right| \\ &= \lim_n \left| \frac{(n+1)^2 \cdot (x+2)}{n^2} \right| \\ &= \lim_n \frac{(n+1)^2 \cdot |x+2|}{n^2} \\ &= |x+2| \cdot \lim_n \left(\frac{n+1}{n} \right)^2 \\ &= |x+2| \cdot \left(\lim_n \frac{n+1}{n} \right)^2 \\ &= |x+2| \cdot \left(\lim_n \frac{n}{n} \right)^2 = |x+2| \cdot 1^2 = |x+2|. \end{aligned}$$

Aplicando o critério, concluímos que obtemos uma série absolutamente convergente para valores de x que verifiquem $|x+2|<1$, e uma série divergente para valores de x que verifiquem $|x+2|>1$. Para $|x+2|=1$ o critério não é conclusivo. São válidas as equivalências

$$\begin{aligned}
|x+2| &= 1 \Leftrightarrow x+2=1 \ \vee \ x+2=-1 \Leftrightarrow x=-1 \ \vee \ x=-3 \\
|x+2| &< 1 \Leftrightarrow -1<x+2<1 \Leftrightarrow -3<x<-1 \\
|x+2| &> 1 \Leftrightarrow x+2<-1 \ \vee \ x+2>1 \Leftrightarrow x<-3 \ \vee \ x>-1
\end{aligned}$$

Para $x=-3$ temos a série numérica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-3+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot (-3+2)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot (-1)^n\right]$$

que é divergente pois o termo geral $u_n = n^2 \cdot (-1)^n$ não tende para 0. Na verdade, o termo geral não converge pois para n par temos $u_n \to +\infty$ enquanto para n ímpar temos $u_n \to -\infty$. Portanto $x=-3$ não pertence ao domínio de convergência. Para $x=-1$ temos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot (-1+2)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot 1^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

que é divergente pois o termo geral $u_n = n^2$ não tende para 0. Na verdade, o termo geral tende para $+\infty$. Portanto $x=-1$ também não pertence ao domínio de convergência. Concluímos então que o domínio de convergência da série de potências é

$$D = \left]-3,-1\right[$$

onde a convergência é absoluta.

<u>ALTERNATIVA</u> (Cálculo do raio de convergência) Temos $v_n = n^2$ como a "parte" do termo geral que não depende de x. Calculemos o raio de convergência pelo limite

$$\begin{aligned}
R &= \lim_n \left|\frac{v_n}{v_{n+1}}\right| = \lim_n \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| = \lim_n \frac{n^2}{(n+1)^2} \\
&= \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 = \lim_n \left(\frac{n}{n}\right)^2 = 1.
\end{aligned}$$

Sendo o raio de convergência da série de potências $R = 1$, a condição de convergência absoluta $|x+2| < R$ corresponde a

$$|x+2| < 1 \Leftrightarrow -1 < x+2 < 1 \Leftrightarrow -3 < x < -1.$$

Para $x \in]-\infty, -3[\cup]-1, +\infty[$ a série de potências é divergente. Para $x = -3$ temos a série numérica alternada

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-3+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot (-3+2)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot (-1)^n\right]$$

que é divergente pois o termo geral $u_n = n^2 \cdot (-1)^n$ não tende para 0. Na verdade, o termo geral não converge pois para n par temos $u_n \to +\infty$ enquanto para n ímpar temos $u_n \to -\infty$. Para $x = -1$ temos a série numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(-1+2) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot (-1+2)^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[n^2 \cdot 1^n\right] = \sum_{n=1}^{\infty} n^2$$

que que é divergente pois o termo geral $u_n = n^2$ não tende para 0. Na verdade, o termo geral tende para $+\infty$. Em conclusão, o domínio de convergência da série de potências é $D =]-3, -1[$, onde a convergência é absoluta.

2. A circunferência de centro $(0,0)$ e raio 1 tem por equação $x^2 + y^2 = 1$. Consideremos então a função Lagrangeana

$$\mathcal{L}(x, y, \lambda) = x^2 + 2y - \lambda\left(x^2 + y^2 - 1\right),$$

e calculemos os respectivos pontos críticos dados pelo sistema

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial y} = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2 - 2\lambda y = 0 \\ -x^2 - y^2 + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x(1-\lambda) = 0 \\ \lambda = 1/y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}.$$

Resolvendo o sistema, obtemos

$$\begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1/y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} 1 - \lambda = 0 \\ \lambda = 1/y \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1/y \\ y = 1 \vee y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 1/\lambda \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1/y \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1/y \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 1 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 1 \\ x^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = 1 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \lambda = -1 \\ y = -1 \end{cases} \vee \begin{cases} \lambda = 1 \\ y = 1 \\ x = 0 \end{cases}$$

Temos então os pontos críticos $(0, 1)$, para $\lambda = 1$, e $(0, -1)$, para $\lambda = -1$. Com $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 1$, consideremos a matriz Hessiana orlada

$$\bar{H}f\,(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & 2 - 2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{bmatrix}.$$

Dado que $n - m = 2 - 1 = 1$, apenas é necessário considerar 1 determinante, o de maior ordem. Por outro lado, dado que $m = 1$, há que multiplicar esse determinante por $(-1)^m = (-1)^1 = -1$. No ponto crítico $(0, 1)$ (com $\lambda = 1$) temos

$$\bar{\Delta}_3 = (-1)^1 \cdot \left|\bar{H}f\,(0, 1)\right| = - \begin{vmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0,$$

donde, com este método, nada podemos concluir sobre a existência de um extremo da função f no ponto $(0,1)$. No ponto crítico$(0,-1)$ (com $\lambda = -1$) temos

$$\bar{\Delta}_3 = (-1)^1 \cdot \left|\bar{H}f\,(0,-1)\right| = -\begin{vmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0$$

donde concluímos que $(0,-1)$ é um mínimo condicionado da função f.

3. (**digitalizado**)

NOTA SOBRE PREÇOS SOMBRA E CUSTOS REDUZIDOS:

Os preços sombra e os custos reduzidos encontram-se na última linha (a da f.o.) do quadro óptimo do Simplex (ou nos *output* do Solver). No entanto,

– os preços sombra estão nas colunas das variáveis de folga, de excesso ou artificiais (apenas consideramos o preço sombra na coluna de uma variável artificial u_i quando não existe s_i ou t_i), ou seja, um preço sombra está sempre associado à variável auxiliar (principal) de uma restrição e portanto a um certo recurso,

enquanto

– os custos reduzidos estão nas colunas das variáveis de decisão, ou seja, um custo reduzido está sempre associado a uma variável de decisão.

Os preços sombra e os custos reduzidos devem ser nulos apenas quando a respectiva variável associada é básica ($\neq 0$). Quando tal não se verifica, para pelo menos um dos preços sombra ou custos reduzidos, temos a indicação de que o problema é de *soluções óptimas múltiplas* (ver casos especiais, em particular este exercício 3.).

O que significam os preços sombra e os custos reduzidos?

– Um preço sombra informa qual o aumento sobre o valor (óptimo) da f.o. resultante de aumentar em 1 unidade a quantidade (termo independente) do respectivo recurso, dentro do intervalo de sensibilidade desse recurso (em linguagem da Economia diz-se que o preço sombra relativo a certo recurso mede o valor marginal desse recurso em relação ao lucro total). É nulo quando o recurso não é utilizado na totalidade (no *output* do Solver: "valor final" e "valor da célula" dife-rente do valor inicial do recurso), ou seja, quando a variável auxiliar associada é básica ($\neq 0$) e a restrição respectiva é não-activa (no *output* do Solver: "estado" arquivar). É não-nulo no caso contrário. Por exemplo, um problema tenta averiguar qual o número de mesas e o número de cadeiras que se deve construir com certos recursos para obter o lucro máximo, sendo um dos recursos a existência de apenas 150 horas de trabalho de máquinas. Se no quadro óptimo é indicado que o preço sombra é 0, tal significa que a variável de folga (sobra/folga de horas) é superior a 0 (portanto, é básica) e que, como tal, não são utilizadas todas as horas disponíveis (o "valor final" é inferior a 150). Se no quadro óptimo é indicado que o preço sombra é 10, tal significa que a variável de folga (sobra/folga de horas) é 0 (portanto, é não-básica) logo são utilizadas todas as horas disponíveis (o "valor final" é de 150); ficamos então a saber que, se utilizarmos $190 = 150 + 40$ horas de trabalho de máquinas, teremos um lucro adicional de $40 \cdot 10 = 400$ u.m., desde que $150 + 40$ esteja dentro do intervalo de sensibilidade

$$[150 - (\text{"permissível diminuir"}), 150 + (\text{"permissível aumentar"})]$$

relativo a esse termo independente $b = 150$.

– Um custo reduzido, quando é não-nulo (é não-básica a variável de decisão respectiva, portanto com valor 0), informa qual a redução (pensando num problema de MAX) no valor (óptimo) da f.o. resultante de considerar essa variavel de decisão como básica ($\neq 0$) e com valor 1. Por exemplo, um problema tenta averiguar qual o número x de mesas e o número y de cadeiras que se deve construir com certos recursos para obter o lucro máximo; no quadro óptimo é indicado que não se devem construir cadeiras (ou seja, que $y = 0$) e que o seu custo reduzido é de $5/2$; contudo há uma encomenda importante de 30 cadeiras; o custo reduzido de $5/2$ significa que por cada cadeira que decidirmos construir (contra o indicado no quadro óptimo) há um impacto de $5/2$ u.m. no lucro, logo para dar resposta à encomenda das 30 cadeiras, há uma redução de $\frac{5}{2} \cdot 10 = 25$ u.m. no lucro.

4. Dado que a procura total (necessidades nas livrarias)

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = 10 + 10 + 10 + 10 = 40$$

é igual à oferta total (capacidade de entregas das distribuidoras)

$$a_1 + a_2 + a_3 = 12 + 17 + 11 = 40,$$

não é necessário considerar qualquer Origem (distribuidora) ou Destino (livraria) fictícios.O problema está em equilíbrio. A tabela dos custos (em u.m.) de uma entrega de cada central de distribuição para cada livraria é

	L1	**L2**	**L3**	**L4**
D1	100+400=500	100+650=750	100+200=300	100+350=450
D2	100+550=650	100+700=800	100+300=400	100+500=600
D3	100+300=400	100+600=700	100+400=500	100+450=550

A este problema de Transporte corresponde a formulação seguinte como problema de PL:

$$\begin{aligned} MIN\ Z \ &= \ 500x_{11} + 750x_{12} + 300x_{13} + 450x_{14} + 650x_{21} + 800x_{22} \\ &\quad +400x_{23} + 600x_{24} + 400x_{31} + 700x_{32} + 500x_{33} + 550x_{34} \end{aligned}$$

s.a.

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 12 \ \text{(oferta na Origem 1)} \\ x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 17 \ \text{(oferta na Origem 2)} \\ x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 11 \ \text{(oferta na Origem 3)} \\ x_{11} + x_{21} + x_{31} = 10 \ \text{(procura no Destino 1)} \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} = 10 \ \text{(procura no Destino 2)} \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} = 10 \ \text{(procura no Destino 3)} \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} = 20 \ \text{(procura no Destino 4)} \\ \\ x_{ij} \geq 0, \quad \text{com } i = 1,2,3 \ \text{ e } \ j = 1,2,3,4 \end{cases} .$$

em que cada variável de decisão x_{ij} corresponde ao número de entregas a fazer desde a Origem i até ao Destino j.

Construámos o 1^o quadro para termos uma SBA do problema. Este é construído pelo Método do Canto Superior Esquerdo, colocando em cada célula o valor de cada variável de decisão x_{ij} calculado através do mínimo

$$x_{ij} = \min\ (\text{oferta disponivel em } O_i,\ \text{procura disponível em } D_j)\,.$$

Obtemos então

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	$\min(12,10) = \mathbf{10}$	$\min(2,10) = \mathbf{2}$	$\min(0,10) = \mathbf{0}$	$\min(0,10) = \mathbf{0}$	12
O_2	$\min(17,0) = \mathbf{0}$	$\min(17,8) = \mathbf{8}$	$\min(9,10) = \mathbf{9}$	$\min(0,10) = \mathbf{0}$	17
O_3	$\min(11,0) = \mathbf{0}$	$\min(11,0) = \mathbf{0}$	$\min(11,1) = \mathbf{1}$	$\min(10,10) = 1\mathbf{0}$	11
b_j	10	10	10	10	40

.

Assim, a SBA fornecida pelo 1^o quadro é tal que as variáveis básicas têm os valores

$$x_{11} = 10, \;\; x_{12} = 2, \;\; x_{22} = 8, \;\; x_{23} = 9, \;\; x_{33} = 1 \;\text{ e }\; x_{34} = 10$$

sendo as restantes variáveis x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{31} e x_{32} não-básicas (porque têm valor nulo). Confirma-se que existem $N + m - 1 = 4 + 3 - 1 = 6$ variáveis básicas na SBA (em que N é o número de Destinos, m é o número de Origens). Para esta SBA o valor da f.o. é

$$\begin{aligned} Z &= 10 \cdot 500 + 2 \cdot 750 + 8 \cdot 800 + 9 \cdot 400 + 1 \cdot 500 + 10 \cdot 550 \\ &= 5000 + 1500 + 6400 + 3600 + 500 + 5500 = 22500 \text{ u.m..} \end{aligned}$$

Façamos o Teste de Optimalidade a fim de averiguar se esta SBA é óptima.

1ª parte do teste: dadas as variáveis básicas x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{33} e x_{34}, consideremos o sistema de equações $u_i + v_j = c_{ij}$ (portanto quando $x_{ij} \neq 0$):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 500 \\ u_1 + v_2 = 750 \\ u_2 + v_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_3 = 500 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases} .$$

Dado que se trata de um sistema com 6 equações mas com 7 incógnitas, tomemos como nulo o valor de uma das variáveis mais frequentes do sistema. Tomando $v_2 = 0$ obtemos então

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 500 \\ u_1 = 750 \\ u_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_3 = 500 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = -250 \\ --- \\ --- \\ v_3 = -400 \\ u_3 + v_3 = 500 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ --- \\ --- \\ u_3 = 900 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ ---- \\ v_4 = -350 \end{cases}.$$

2ª parte do teste: dadas as variáveis não-básicas x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{31} e x_{32}, consideremos as igualdades $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (portanto quando $x_{ij} = 0$):

$$\begin{cases} \delta_{13} = 300 - 750 - (-400) = -50 \\ \delta_{14} = 450 - 750 - (-350) = 50 \\ \delta_{21} = 650 - 800 - (-250) = 50 \\ \delta_{24} = 600 - 800 - (-350) = 50 \\ \delta_{31} = 400 - 900 - (-250) = -250 \\ \delta_{32} = 700 - 900 - 0 = -200 \end{cases}$$

Dado que existem δ_{ij} com valores negativos (δ_{13}, δ_{31} e δ_{32}), concluímos que a SBA presente neste quadro não é a óptima.

Melhoramento da SBA: dado que $\delta_{31} = -250$ é o δ_{ij} negativo de valor absoluto mais elevado, concluímos que x_{31} (variável com os mesmos índices) é a variável que passa a básica com um valor positivo θ a determinar. A determinação de $\theta > 0$ exige o esboço do 2^o quadro deste problema onde teremos $x_{31} = \theta \neq 0$. Com $x_{31} = \theta \neq 0$, e para manter as oferta e procura totais do problema, temos as seguintes alterações às células do 1^o quadro:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	$\boxed{\mathbf{10-\boldsymbol{\theta}}} \rightarrow$	$\boxed{\mathbf{2}+\theta} \downarrow$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	12
O_2	$\uparrow \mathbf{0}$	$\boxed{\mathbf{8-\boldsymbol{\theta}}} \rightarrow$	$\boxed{\mathbf{9+\boldsymbol{\theta}}} \downarrow$	$\mathbf{0}$	17
O_3	$\boxed{\boxed{\boldsymbol{\theta}}}$	$\underset{\rightarrow}{\mathbf{0}}$	$\boxed{\mathbf{1-\boldsymbol{\theta}}}$	$\mathbf{10}$	11
b_j	10	10	10	10	40

.

Note que o percurso de avaliação é complexo pois não se resume a alterações em duas linhas e duas colunas. O percurso de avaliação baseia-se na necessidade de:

– **evitar células com valor $-\theta$ pois estas têm de ter valor positivo e** $\theta > 0$; como tal, não alteramos em x_{21} (pois ficaria $x_{21} = -\theta$) mas sim em x_{11}, que passa a $10 - \theta$; também não alteramos em x_{32} (pois ficaria $x_{32} = -\theta$) mas sim em x_{33} que passa a $1 - \theta$;

– **evitar mais células com valor θ (além da x_{31}) porque isso potencia o aumento do número de variáveis básicas**; por isso não alteramos em x_{13} nem em x_{14} (porque levaria a mais do que 7 variáveis básicas) mas sim em x_{12} que passa a $2+\theta$; de seguida alteramos em x_{22} para $8 - \theta$ (note que não podemos pôr $x_{32} = -\theta$) e, por conseguinte, em x_{23} para $9 + \theta$;

– **evitar subtrair θ em elementos iguais porque tal também potencia a diminuição do número de variáveis básicas**; por isso não alteramos x_{34} (que passaria de 10 a $10 - \theta$ tal como x_{11}) pois tal poderia levar a menos do que 7 variáveis básicas, se θ viesse a ser tomado como 10.

Temos então que exigir

$$10 - \theta \geq 0, \quad 8 - \theta \geq 0 \quad \text{e ainda} \quad 1 - \theta \geq 0,$$

ou seja,

$$10 \geq \theta, \quad 8 \geq \theta \quad \text{e ainda} \quad 1 \geq \theta.$$

As 3 condições são satisfeitas desde que $\theta \leq 1$. Tomemos então para θ o valor mais elevado que este pode assumir: $\theta = 1$. O 2^o quadro fica então definido como

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	$\boxed{\mathbf{9}}$	$\boxed{\mathbf{3}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{0}$	12
O_2	$\mathbf{0}$	$\boxed{\mathbf{7}}$	$\boxed{\mathbf{10}}$	$\mathbf{0}$	17
O_3	$\boxed{\boxed{\mathbf{1}}}$	$\mathbf{0}$	$\boxed{\boxed{\mathbf{0}}}$	$\mathbf{10}$	11
b_j	10	10	10	10	40

e é a variável $x_{33} = 0$ que deixa de ser básica. Para a nova SBA o valor da f.o. é

$$\begin{aligned} Z &= 9 \cdot 500 + 3 \cdot 750 + 7 \cdot 800 + 10 \cdot 400 + 1 \cdot 400 + 10 \cdot 550 \\ &= 4500 + 2250 + 5600 + 4000 + 400 + 5500 = 22250 \text{ u.m..} \end{aligned}$$

Façamos o Teste de Optimalidade a fim de averiguar se esta SBA é óptima.

1ª parte do teste: dadas as variáveis básicas x_{11}, x_{12}, x_{22}, x_{23}, x_{31} e x_{34}, consideremos o sistema de equações $u_i + v_j = c_{ij}$ (portanto quando $x_{ij} \neq 0$):

$$\begin{cases} u_1 + v_1 = 500 \\ u_1 + v_2 = 750 \\ u_2 + v_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases}.$$

Dado que se trata de um sistema com 6 equações mas com 7 incógnitas, tomemos como nulo o valor de uma das variáveis mais frequentes do sistema. Tomando $u_1 = 0$ obtemos então

$$\begin{cases} v_1 = 500 \\ v_2 = 750 \\ u_2 + v_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ u_2 = 50 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 = -100 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ --- \\ v_3 = 350 \\ --- \\ v_4 = 650 \end{cases}.$$

2ª parte do teste: dadas as variáveis não-básicas x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{24}, x_{32} e x_{33}, consideremos as igualdades $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (portanto quando

$x_{ij} = 0$):

$$\begin{cases} \delta_{13} = 300 - 0 - 350 = -50 \\ \delta_{14} = 450 - 0 - 650 = -200 \\ \delta_{21} = 650 - 50 - 500 = 100 \\ \delta_{24} = 600 - 50 - 650 = -100 \\ \delta_{32} = 700 - (-100) - 750 = 50 \\ \delta_{33} = 500 - (-100) - 350 = 250 \end{cases}.$$

Dado que existem δ_{ij} com valores negativos (δ_{13}, δ_{14} e δ_{24}), concluímos que a SBA presente neste quadro não é a óptima.

Melhoramento da SBA: dado que $\delta_{14} = -200$ é o δ_{ij} negativo de valor absoluto mais elevado, concluímos que x_{14} é a variável que passa a básica com um valor positivo θ a determinar. A determinação de $\theta > 0$ exige o esboço do 3^o quadro deste problema onde teremos $x_{14} = \theta \neq 0$. Com $x_{14} = \theta \neq 0$, e para manter as oferta e procura totais do problema, temos as seguintes alterações às células do 2^o quadro:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	$\boxed{\mathbf{9-\theta}}$	**3**	**0**	$\boxed{\boxed{\boldsymbol{\theta}}}$	12
O_2	**0** $\uparrow$	**7**	**10**	**0** $\downarrow$	17
O_3	$\boxed{\mathbf{1+\theta}}$	$\underset{\leftarrow}{\mathbf{0}}$	$\underset{\leftarrow}{\mathbf{0}}$	$\boxed{\mathbf{10-\theta}}$	11
b_j	10	10	10	10	40

Neste caso o percurso de avaliação é simples pois resume-se a alterações em apenas duas linhas e duas colunas.

Temos então que exigir

$$9 - \theta \geq 0 \quad \text{e} \quad 10 - \theta \geq 0.$$

Ambas as condições são satisfeitas desde que $\theta \leq 9$. Tomemos então para θ o valor mais elevado que este pode assumir: $\theta = 9$. O 3^o quadro fica então definido como

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	$\boxed{\boxed{\mathbf{0}}}$	**3**	**0**	$\boxed{\boxed{\mathbf{9}}}$	12
O_2	**0**	**7**	**10**	**0**	17
O_3	$\boxed{\mathbf{10}}$	**0**	**0**	$\boxed{\mathbf{1}}$	11
b_j	10	10	10	10	40

e é a variável $x_{11} = 0$ que deixa de ser básica. Para a nova SBA o valor da f.o. é

$$\begin{aligned} Z &= 3 \cdot 750 + 9 \cdot 450 + 7 \cdot 800 + 10 \cdot 400 + 10 \cdot 400 + 1 \cdot 550 \\ &= 2250 + 4050 + 5600 + 4000 + 4000 + 550 = 20450 \text{ u.m.} \end{aligned}$$

(o vosso trabalho apenas exigia até aqui). Façamos o Teste de Optimalidade a fim de averiguar se a SBA anterior é óptima.

1ª parte do teste: dadas as variáveis básicas x_{12}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{31} e x_{34}, consideremos o sistema de equações $u_i + v_j = c_{ij}$ (portanto quando $x_{ij} \neq 0$):

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 750 \\ u_1 + v_4 = 450 \\ u_2 + v_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases}.$$

Dado que se trata de um sistema com 6 equações mas com 7 incógnitas, tomemos como nulo o valor de uma das variáveis mais frequentes do sistema. Tomando $u_2 = 0$ obtemos então

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 750 \\ u_1 + v_4 = 450 \\ v_2 = 800 \\ v_3 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = -50 \\ u_1 + v_4 = 450 \\ --- \\ --- \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ v_4 = 500 \\ --- \\ --- \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_4 = 550 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ --- \\ --- \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 = 50 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ --- \\ --- \\ v_1 = 350 \\ --- \end{cases}.$$

2ª parte do teste: dadas as variáveis não-básicas x_{11}, x_{13}, x_{21}, x_{24}, x_{32} e x_{33}, consideremos as igualdades $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (portanto quando

$x_{ij} = 0$):

$$\begin{cases} \delta_{11} = 500 - (-50) - 350 = 200 \\ \delta_{13} = 300 - (-50) - 400 = -50 \\ \delta_{21} = 650 - 0 - 350 = 250 \\ \delta_{24} = 600 - 0 - 500 = 100 \\ \delta_{32} = 700 - 50 - 800 = -150 \\ \delta_{33} = 500 - 50 - 400 = 50 \end{cases}$$

Dado que existem δ_{ij} com valores negativos (δ_{13} e δ_{32}), concluímos que a SBA presente neste quadro não é a óptima.

Melhoramento da SBA: dado que $\delta_{32} = -150$ é o δ_{ij} negativo de valor absoluto mais elevado, concluímos que x_{32} é a variável que passa a básica com um valor positivo θ a determinar. A determinação de $\theta > 0$ exige o esboço do 4^o quadro deste problema onde teremos $x_{32} = \theta \neq 0$. Com $x_{32} = \theta \neq 0$, e para manter as oferta e procura totais do problema, temos as seguintes alterações às células do 3^o quadro:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	**0**	$\boxed{\mathbf{3-\theta}}$	**0**	$\boxed{\mathbf{9+\theta}}$	12
O_2	**0**	**7**	**10**	**0**	17
O_3	**10**	$\boxed{\boxed{\boldsymbol{\theta}}}$	**0**	$\boxed{\mathbf{1-\theta}}$	11
b_j	10	10	10	10	40

.

Neste caso o percurso de avaliação é simples pois resume-se a alterações em apenas duas linhas e duas colunas.

Temos que exigir

$$3 - \theta \geq 0 \quad \text{e} \quad 1 - \theta \geq 0.$$

Ambas as condições são satisfeitas quando $\theta \leq 1$. Tomemos então para θ o valor mais elevado que este pode assumir: $\theta = 1$. O 4^o quadro fica então definido como

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	**0**	$\boxed{\mathbf{2}}$	**0**	$\boxed{\mathbf{10}}$	12
O_2	**0**	**7**	**10**	**0**	17
O_3	**10**	$\boxed{\boxed{\mathbf{1}}}$	**0**	$\boxed{\boxed{\mathbf{0}}}$	11
b_j	10	10	10	10	40

.

e é a variável $x_{34} = 0$ que deixa de ser básica. Para a nova SBA o valor da f.o. é

$$\begin{aligned} Z &= 2 \cdot 750 + 10 \cdot 450 + 7 \cdot 800 + 10 \cdot 400 + 10 \cdot 400 + 1 \cdot 700 \\ &= 1500 + 4500 + 5600 + 4000 + 4000 + 700 = 20300 \text{ u.m..} \end{aligned}$$

Façamos o Teste de Optimalidade a fim de averiguar se a SBA anterior é óptima.

1ª parte do teste: dadas as variáveis básicas x_{12}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{31} e x_{32}, consideremos o sistema de equações $u_i + v_j = c_{ij}$ (portanto quando $x_{ij} \neq 0$):

$$\begin{cases} u_1 + v_2 = 750 \\ u_1 + v_4 = 450 \\ u_2 + v_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_2 = 700 \end{cases}.$$

Dado que se trata de um sistema com 6 equações mas com 7 incógnitas, tomemos como nulo o valor de uma das variáveis mais frequentes do sistema. Tomando $v_2 = 0$ obtemos então

$$\begin{cases} u_1 = 750 \\ u_1 + v_4 = 450 \\ u_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 = 700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ v_4 = -300 \\ --- \\ v_3 = -400 \\ v_1 = -300 \\ --- \end{cases}.$$

2ª parte do teste: dadas as variáveis não-básicas x_{11}, x_{13}, x_{21}, x_{24}, x_{33} e x_{34}, consideremos as igualdades $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (portanto quando $x_{ij} = 0$):

$$\begin{cases} \delta_{11} = 500 - 750 - (-300) = 50 \\ \delta_{13} = 300 - 750 - (-400) = -50 \\ \delta_{21} = 650 - 800 - (-300) = 50 \\ \delta_{24} = 600 - 800 - (-300) = 100 \\ \delta_{33} = 500 - 700 - (-400) = 200 \\ \delta_{34} = 550 - 700 - (-300) = 50 \end{cases}$$

Dado que existe um δ_{ij} com valor negativo (δ_{13}), concluímos que a SBA presente neste quadro ainda não é a óptima e, para melhorar a SBA, consideramos que é a variável x_{13} que passa a básica com um valor positivo θ a determinar. A determinação de $\theta > 0$ exige o esboço do 5^o quadro deste problema onde teremos $x_{13} = \theta \neq 0$. Com $x_{13} = \theta \neq 0$, e para manter as oferta e procura totais do problema, temos as seguintes alterações às células do 4^o quadro:

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	**0**	$\boxed{\mathbf{2-\theta}}$	$\boxed{\boldsymbol{\theta}}$	**10**	12
O_2	**0**	$\boxed{\mathbf{7+\theta}}$	$\boxed{\mathbf{10-\theta}}$	**0**	17
O_3	**10**	**1**	**0**	**0**	11
b_j	10	10	10	10	40

.

Neste caso o percurso de avaliação é simples pois resume-se a alterações em apenas duas linhas e duas colunas.

Temos que exigir

$$2 - \theta \geq 0 \quad \text{e} \quad 10 - \theta \geq 0.$$

Ambas as condições são satisfeitas quando $\theta \leq 2$. Tomemos então para θ o valor mais elevado que este pode assumir: $\theta = 2$. O 5^o quadro fica então definido como

	D_1	D_2	D_3	D_4	a_i
O_1	**0**	$\boxed{\boxed{\mathbf{0}}}$	$\boxed{\boxed{\mathbf{2}}}$	**10**	12
O_2	**0**	$\boxed{\mathbf{9}}$	$\boxed{\mathbf{8}}$	**0**	17
O_3	**10**	**1**	**0**	**0**	11
b_j	10	10	10	10	40

.

e é a variável $x_{12} = 0$ que deixa de ser básica. Para a nova SBA o valor da f.o. é

$$\begin{aligned} Z &= 2 \cdot 300 + 10 \cdot 450 + 9 \cdot 800 + 8 \cdot 400 + 10 \cdot 400 + 1 \cdot 700 \\ &= 600 + 4500 + 7200 + 3200 + 4000 + 700 = 20200 \text{ u.m..} \end{aligned}$$

Façamos o Teste de Optimalidade a fim de averiguar se a SBA anterior é óptima.

1ª parte do teste: dadas as variáveis básicas x_{13}, x_{14}, x_{22}, x_{23}, x_{31} e x_{32}, consideremos o sistema de equações $u_i + v_j = c_{ij}$ (portanto quando $x_{ij} \neq 0$):

$$\begin{cases} u_1 + v_3 = 300 \\ u_1 + v_4 = 450 \\ u_2 + v_2 = 800 \\ u_2 + v_3 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_2 = 700 \end{cases}.$$

Dado que se trata de um sistema com 6 equações mas com 7 incógnitas, tomemos como nulo o valor de uma das variáveis mais frequentes do sistema. Tomando $v_3 = 0$ obtemos então

$$\begin{cases} u_1 = 300 \\ u_1 + v_4 = 450 \\ u_2 + v_2 = 800 \\ u_2 = 400 \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_2 = 700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ v_4 = 150 \\ v_2 = 400 \\ --- \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 + v_2 = 700 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ --- \\ --- \\ u_3 + v_1 = 400 \\ u_3 = 300 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} --- \\ --- \\ --- \\ --- \\ v_1 = 100 \\ --- \end{cases}.$$

2ª parte do teste: dadas as variáveis não-básicas x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{24}, x_{33} e x_{34}, consideremos as igualdades $\delta_{ij} = c_{ij} - u_i - v_j$ (portanto quando $x_{ij} = 0$):

$$\begin{cases} \delta_{11} = 500 - 300 - 100 = 100 \\ \delta_{12} = 750 - 300 - 400 = 50 \\ \delta_{21} = 650 - 400 - 100 = 150 \\ \delta_{24} = 600 - 400 - 150 = 50 \\ \delta_{33} = 500 - 300 - 0 = 200 \\ \delta_{34} = 550 - 300 - 150 = 100 \end{cases}$$

Dado que não existe (FINALMENTE!...) nenhum δ_{ij} com valor negativo, concluímos que a SBA presente neste quadro é a óptima,

$$\begin{aligned} \text{SBA óptima} &= (x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{24}, x_{31}, x_{32}, x_{33}, x_{34}) \\ &= (0, 0, 2, 10, 0, 9, 8, 0, 10, 1, 0, 0)\,. \end{aligned}$$

O valor óptimo do problema é

$$\begin{aligned} Z &= 2 \cdot 300 + 10 \cdot 450 + 9 \cdot 800 + 8 \cdot 400 + 10 \cdot 400 + 1 \cdot 700 \\ &= 600 + 4500 + 7200 + 3200 + 4000 + 700 = 20200 \text{ u.m..} \end{aligned}$$

5. Dado que o número de Tarefas (os 5 locais) *é superior* ao número de Agentes (os 4 centros populacionais), há que considerar um agente fictício, o centro populacional C5. O número n de Tarefas e Agentes é agora de 5. Como ao agente fictício estão associados indíces nulos de inconveniência (para qualquer um dos locais), a matriz vai ter uma linha (a 5^a) de zeros:

$$\begin{bmatrix} 40 & 43 & 42 & 38 & 45 \\ 37 & 40 & 41 & 44 & 36 \\ 40 & 42 & 39 & 37 & 38 \\ 45 & 40 & 39 & 42 & 41 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A este problema de Afectação corresponde a formulação seguinte como problema de PL:O problema é:

$$\begin{aligned} MIN\ \ Z &= 40x_{11} + 43x_{12} + 42x_{13} + 38x_{14} + 45x_{15} + 37x_{21} + 40x_{22} \\ &\quad +41x_{23} + 44x_{24} + 36x_{25} + 40x_{31} + 42x_{32} + 39x_{33} + 37x_{34} \\ &\quad +38x_{35} + 45x_{41} + 40x_{42} + 39x_{43} + 42x_{44} + 41x_{45} \end{aligned}$$

s.a.

$$\begin{cases} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}=1 & \text{(o agente 1 só efectua uma das tarefas)} \\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}=1 & \text{(o agente 2 só efectua uma das tarefas)} \\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}=1 & \text{(o agente 3 só efectua uma das tarefas)} \\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}=1 & \text{(o agente 4 só efectua uma das tarefas)} \\ x_{51}+x_{52}+x_{53}+x_{54}+x_{55}=1 & \text{(o agente 5 só efectua uma das tarefas)} \\ x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}+x_{51}=1 & \text{(a tarefa 1 só é efectuada p/ um dos agentes)} \\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}+x_{52}=1 & \text{(a tarefa 2 só é efectuada p/ um dos agentes)} \\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}+x_{53}=1 & \text{(a tarefa 3 só é efectuada p/ um dos agentes)} \\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}+x_{54}=1 & \text{(a tarefa 4 só é efectuada p/ um dos agentes)} \\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}+x_{55}=1 & \text{(a tarefa 5 só é efectuada p/ um dos agentes)} \\ x_{ij} \geq 0, \quad \text{com } i,j=1,2,3,4,5 & \end{cases} .$$

em que cada variável de decisão x_{ij} vale 1 ou 0, conforme o agente i execute a tarefa j ou não, respectivamente.

Apliquemos o Método Húngaro. Subtraindo o menor elemento de cada coluna a essa coluna (o que, neste caso, não modifica a matriz) e o menor elemento de cada linha a essa linha, obtemos

$$\begin{bmatrix} 40 & 43 & 42 & \mathbf{38} & 45 \\ 37 & 40 & 41 & 44 & \mathbf{36} \\ 40 & 42 & 39 & \mathbf{37} & 38 \\ 45 & 40 & \mathbf{39} & 42 & 41 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 5 & 4 & \mathbf{0} & 7 \\ 1 & 4 & 5 & 8 & \mathbf{0} \\ 3 & 5 & 2 & \mathbf{0} & 1 \\ 6 & 1 & \mathbf{0} & 3 & 2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$

Apenas necessitamos de 4 riscos para tapar todos os zeros da matriz (por exemplo, linha 5 $\rightarrow$ coluna 4 $\rightarrow$ coluna 3 $\rightarrow$ coluna 5). Este número é inferior a $n = 5$. Assim, não é ainda esta matriz que indica a solução óptima.

Considerando os riscos a taparem

$$\text{linha } 5 \;+\; \text{coluna } 4 \;+\; \text{coluna } 3 \;+\; \text{coluna } 5,$$

temos $K = 1$ como o menor valor entre os elemento não riscados. Este valor $K = 1$ é subtraído a cada um dos elementos não riscados e adicionado a cada um dos elementos duplamente riscados. Obtemos então

$$\begin{bmatrix} 2-1 & 5-1 & 4 & 0 & 7 \\ 1-1 & 4-1 & 5 & 8 & 0 \\ 3-1 & 5-1 & 2 & 0 & 1 \\ 6-1 & 1-1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0+1 & 0+1 & 0+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 4 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & 5 & 8 & 0 \\ 2 & 4 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Para esta matriz de custos reduzidos, voltemos ao procedimento de tapar todos os zeros com o menor número de riscos possível. Apenas são necessários 4 riscos para tapar todos os zeros da matriz, por exemplo, linha 2 $\rightarrow$ coluna 4 $\rightarrow$ linha 4 $\rightarrow$ linha 5. Este número é inferior a $n = 5$. Assim, ainda não é esta matriz que indica a solução óptima.

Considerando os riscos a taparem

$$\text{linha } 2 \; + \; \text{coluna } 4 \; + \; \text{linha } 4 \; + \; \text{linha } 5,$$

temos $K = 1$ como o menor valor entre os elemento não riscados. Este valor $K = 1$ é subtraído a cada um dos elementos não riscados e adicionado a cada um dos elementos duplamente riscados. Obtemos então

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 4-1 & 4-1 & 0 & 7-1 \\ 0 & 3 & 5 & 8+1 & 0 \\ 2-1 & 4-1 & 2-1 & 0 & 1-1 \\ 5 & 0 & 0 & 3+1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1+1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Para esta matriz de custos reduzidos, voltemos ao procedimento de tapar todos os zeros com o menor número de riscos possível. São necessários 5 riscos para tapar todos os zeros da matriz, por exemplo,

$$\text{coluna } 1 \; + \; \text{coluna } 2 \; + \; \text{coluna } 4 \; + \; \text{coluna } 5 \; + \; \text{linha } 4.$$

Este número é igual a $n = 5$. Assim, é esta matriz que indica a solução óptima. Escolhendo adequadamente um conjunto de 5 zeros,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0}^* & 3 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 5 & 9 & \mathbf{0}^* \\ 1 & 3 & 1 & \mathbf{0}^* & 0 \\ 5 & 0 & \mathbf{0}^* & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{0}^* & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(considerar primeiro as linhas e colunas com um só zero) obtemos

$$x_{11} = 1, \;\; x_{25} = 1, \;\; x_{34} = 1, \;\; x_{43} = 1, \;\; x_{52} = 1$$

Na verdade o local L2 não é instalado qualquer moinho pois, embora $x_{52} = 1$, o centro populacional C5 é fictício. O índice de inconveniência total mínimo é

$$Z = 40 + 36 + 37 + 39 + 0 = 152.$$

Existem outras soluções, por exemplo,

$$x_{14} = 1, \;\; x_{21} = 1, \;\; x_{35} = 1, \;\; x_{43} = 1, \;\; x_{52} = 1$$

para a escolha de 5 zeros

$$\begin{bmatrix} 0 & 3 & 3 & \mathbf{0}^* & 6 \\ \mathbf{0}^* & 3 & 5 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & \mathbf{0}^* \\ 5 & 0 & \mathbf{0}^* & 4 & 2 \\ 0 & \mathbf{0}^* & 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(com o mesmo valor mínimo $Z = 38 + 37 + 38 + 39 + 0 = 152$). Diz-se então que o problema tem **soluções óptimas múltiplas**.

6. Dado que a matriz de *payoffs*

		Jogador B		
		1	**2**	**3**
Jogador A	**I**	3	1	4
	II	2	−2	−1
	III	−1	5	0

é relativa ao Jogador A, nela estão os ganhos e as perdas do Jogador A no jogo.

Usando o critério MINMAX, temos para o Jogador A

$$MAXMIN = MAX\,\{1, -2, -1\} = 1$$

e para o Jogador B

$$MINMAX = MIN\,\{3, 5, 4\} = 3.$$

Dado que $MAXMIN \neq MINMAX$ (pois $1 \neq 3$) concluímos que não existe ponto de sela e que o jogo é instável. Tal significa que este jogo não se resolve por estratégias puras.

Com vista à simplificacção do problema, há que averiguar acerca da existência ou não de estratégias dominadas. Verifica-se que a estratégia II do Jogador A é dominada pela estratégia I porque fornece piores resultados para este jogador,

$$2 < 3, \quad -2 < 1 \quad \text{e} \quad -1 < 4,$$

qualquer que seja a aposta/escolha do adversário. Assim, a estratégia II nunca é escolhida pelo Jogador A e, para este jogador, passamos a considerar apenas as estratégias I e III. Como tal podemos considerar uma matriz de *payoffs* de tipo 2×3,

		Jogador B		
		1	**2**	**3**
Jogador A	**I**	3	1	4
	III	−1	5	0

Agora que foi eliminada a estratégia II do Jogador A, verificamos que também uma das estratégias do Jogador B é dominada, a estratégia 3 é dominada pela estratégia 1,

$$4 > 3 \quad \text{e} \quad 0 > -1,$$

pois esta última fornece melhores resultados para este jogador, qualquer que seja a aposta/escolha do Jogador A. Finalmente temos a matriz de *payoffs* de tipo 2×3,

		Jogador B	
		1	**2**
Jogador A	**I**	3	1
	III	−1	5

Formulemos o problema do Jogador A (sem esquecer a indicação do significado de todos as variáveis usadas na formulação). Sejam x_I e x_{III} a probabilidade do Jogador A escolher cada uma das estratégias I e III, respectivamente. Seja ainda x_4 o ganho mínimo esperado para o Jogador A (notemos que o Jogador A é pessimista). Dado que se pretende maximizar o ganho mínimo esperado, cujo valor óptimo é o valor do jogo, o problema do Jogador A é

$$
\begin{aligned}
&MAX \;\; Z \;=\; x_4 \\
&\text{s.a.} \left\{
\begin{array}{c}
3x_I - x_{III} \geq x_4 \;\; \text{(se Jog. B opta p/ estrat. 1)} \\
x_I + 5x_{III} \geq x_4 \;\; \text{(se Jog. B opta p/ estrat. 2)} \\
\\
x_I + x_{III} = 1 \;\; \text{(por se tratarem de probab.)} \\
\\
x_I, x_{III} \geq 0, \quad x_4 \text{ livre (sinal desconhecido)}
\end{array}
\right. \quad (1)
\end{aligned}
$$

O problema tem $n = 3$ variáveis de decisão. A f.o. é x_4, de valor e sinal desconhecido, pelo que se coloca esta variável de decisão como livre (de sinal). O valor desta variável de decisão no ponto óptimo $\left(x_I^{opt}, x_{III}^{opt}, x_4^{opt}\right)$ corresponde ao valor óptimo para o problema. A primeira e segunda restrições técnicas traduzem o ganho esperado para o Jogador A se o Jogador B optar pelas estratégias 1 e 2, respectivamente, ganho esse que deve ser superior ao ganho máximo x_4. Temos então $m = 3$ restrições técnicas, duas relativas às duas estratégias possíveis para o Jogador B e uma outra decorrente das propriedades das probabilidades.

Usando $x_{III} = 1 - x_I$ obtemos

$$
\begin{aligned}
&MAX \;\; Z \;=\; x_4 \\
&\text{s.a.} \left\{
\begin{array}{c}
3x_I - 1 + x_I \geq x_4 \\
x_I + 5 - 5x_I \geq x_4 \\
\\
x_I \leq 1 \\
\\
x_I \geq 0, \quad x_4 \text{ livre}
\end{array}
\right. ,
\end{aligned}
$$

ou seja,

$$MAX \;\; Z \;=\; x_4$$
$$\text{s.a.} \; \begin{cases} 4x_I - x_4 \geq 1 \\ 4x_I + x_4 \leq 5 \\ \\ x_I \leq 1 \\ \\ x_I \geq 0, \quad x_4 \text{ livre} \end{cases} .$$

Pelo Método do Gradiente **(folha anexa digitalizada)** obtemos o ponto óptimo

$$\left(x_I^{opt}, x_4^{opt}\right) = \left(\frac{3}{4}, 2\right)$$

e o valor óptimo (máximo) $Z = 2$. Sabendo que $x_{III} = 1 - x_I$, obtemos $x_{III}^{opt} = \dfrac{1}{4}$. Assim, concluímos que a estratégia mista do Jogador A consiste no seguinte: em cada 4 jogadas/lances, o Jogador A deve optar 3 vezes pela estratégia I e apenas uma vez pela estratégia III (notemos que já o critério MINMAX tinha "sugerido" a estratégia I para este jogador). O valor do jogo é $Z = x_4 = 2$.

Quanto ao Jogador B, ainda nada se sabe. A formulação do seu problema é:

$$MIN \;\; W \;=\; y_3$$
$$\text{s.a.} \; \begin{cases} 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 \leq y_3 \;\; \text{(se Jog. A opta p/ estrat. I)} \\ (-1) \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 \leq y_3 \;\; \text{(se Jog. A opta p/ estrat. II)} \\ \\ y_1 + y_2 = 1 \;\; \text{(por se tratarem de probabilidades)} \\ \\ y_1, y_2 \geq 0, \quad y_3 \text{ livre (sinal desconhecido)} \end{cases} \tag{2}$$

em que as variáveis de decisão y_j representam a probabilidade do Jogador B escolher cada uma das suas possíveis estratégias, ou seja,

$$\begin{aligned} y_1 &= \text{probabilidade do Jogador B optar pela estrat. 1} \\ y_2 &= \text{probabilidade do Jogador B optar pela estrat. 1} \end{aligned}$$

e y_3 representa a perda máxima esperada (notemos que também o Jogador B é pessimista). É um problema de MIN pois o Jogador B quer minimizar a perda máxima esperada.

O problema tem $n = 3$ variáveis de decisão. No entanto, dado que este problema é o dual do problema associado ao Jogador A, é garantido pelo Teorema da Dualidade que o seu valor óptimo é

$$W = y_3 = 2,$$

o mesmo do problema primal (o problema associado ao Jogador A). Temos o valor do jogo é $x_4 = y_3 = 2$. A resolução do problema do Jogador B pode ser obtida por dualidade, atendendo à solução óptima obtida para o Jogador A e às Relações de Complementaridade.

Sejam s_1 e s_2 as variáveis de folga a considerar neste problema dual em (1) quando escrito na forma normal (sem alterar a igualdade $y_1+y_2 = 1$, pois só exige variável artificial, e esta não é usada nas Relações de Complementaridade)

$$\begin{aligned} MIN\ \ W &= y_3 \\ &\text{s.a.} \left\{ \begin{array}{l} 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + s_1 = y_3 \\ (-1) \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + s_2 = y_3 \\ \\ y_1 + y_2 = 1 \\ \\ y_1, y_2 \geq 0, \quad y_3 \text{ livre} \end{array} \right. , \end{aligned}$$

e t_1e t_2 as variaveis de excesso a considerar no problema primal em (2) quando escrito na forma normal (também sem alterar a igualdade $x_I + x_{III} = 1$)

$$\begin{aligned} MAX\ \ Z &= x_4 \\ &\text{s.a.} \left\{ \begin{array}{c} 3 \cdot x_I - x_{III} - t_1 + u_1 = x_4 \\ x_I + 5 \cdot x_{III} - t_2 + u_2 = x_4 \\ \\ x_I + x_{III} = 1 \\ \\ x_I, x_{III} \geq 0, \quad x_4 \text{ livre} \end{array} \right. . \end{aligned}$$

Sabemos que

$$x_I^{opt} = \frac{3}{4}, \quad x_{III}^{opt} = \frac{1}{4} \quad \text{e} \quad x_4^{opt} = 2,$$

logo, recorrendo às duas primeiras restrições técnicas

$$\begin{array}{l} 3 \cdot x_I - x_{III} - t_1 + u_1 = x_4 \\ x_I + 5 \cdot x_{III} - t_2 + u_2 = x_4 \end{array},$$

obtemos

$$\begin{array}{l} 3 \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{4} - t_1 + 0 = 2 \\ \frac{3}{4} + 5 \cdot \frac{1}{4} - t_2 + 0 = 2 \end{array}$$

ou seja, $t_1^{opt} = 0$ e $t_2^{opt} = 0$. Aplicamos então as Relações de Complementaridade,

PRIMAL (Jogador A)	$\rightarrow$	**DUAL** (Jogador B)
$x_I^{opt} = \frac{3}{4} > 0$	$\rightarrow$	$s_1^{opt} = 0$
$x_{III}^{opt} = \frac{1}{4} > 0$	$\rightarrow$	$s_2^{opt} = 0$
$t_1^{opt} = 0$	$\rightarrow$	$y_1^{opt} \geq 0$
$t_2^{opt} = 0$	$\rightarrow$	$y_2^{opt} \geq 0$

As duas primeiras restrições técnicas

$$\begin{array}{l} 3 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2 + s_1 = y_3 \\ (-1) \cdot y_1 + 5 \cdot y_2 + s_2 = y_3 \end{array},$$

obtemos o sistema

$$\begin{cases} 3y_1 + y_2 + 0 = 2 \\ \\ -y_1 + 5y_2 + 0 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 2 - 3y_1 \\ \\ -y_1 + 5\,(2 - 3y_1) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ \\ -16y_1 = -8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ---- \\ \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 2 - \dfrac{3}{2} = \dfrac{1}{2} \\ \\ y_1 = \dfrac{1}{2} \end{cases}.$$

Assim, o ponto óptimo é

$$\left(y_1^{opt}, y_2^{opt}, y_3^{opt}\right) = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2\right)$$

e o valor óptimo (mínimo) $Z = 2$. Assim, concluímos que a estratégia mista do Jogador B consiste no seguinte: em cada 2 jogadas/lances, o Jogador B deve optar 1 vez pela estratégia 1 e outra vez pela estratégia 2. O valor do jogo é $W = y_2 = 2$.