ISCTE - IUL,
Departamento de Matemática

Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão de Marketing, Economia

Teste Intermédio de OPTIMIZAÇÃO / MATEMÁTICA II

29 de Março de 2014 **Duração: 1h15m + 15m** **2013/2014**

Nome completo: .... Número: ....
Curso: .... Turma: ....
Docente: ....

■ Apresente todas as **justificações** necessárias. ■ Escreva com caneta azul ou preta. ■ O **formulário** está disponível no final da prova. ■ Não é permitido o uso de qualquer **calculadora**. ■ Não são esclarecidas **dúvidas** durante a prova. ■ Não são permitidos **telemóveis** ligados. ■ As folhas do enunciado devem **permanecer agrafadas** durante todo o tempo da prova (incluindo a de rascunho e o formulário). ■ **A folha de rascunho** (no final da prova) pode ser usada excepcionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

$\boxed{1.}$ **[2.5 val.]** Determine a expressão geral da seguinte primitiva:

$$\mathcal{P}\left[\sqrt{2x-1}+\frac{e^x}{1+e^x}+\sin(3x)\right]$$

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

$\boxed{2.}$ [3 val.] Determine a expressão geral das primitivas da função racional

$$f(x) = \frac{1}{x^2 - x}$$

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

$\boxed{3.}$ Calcule o valor de cada um dos seguintes integrais

(a) [2.5 val.] $\int_0^1 x \arctan(x)\, dx$

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

(b) [3 val.] $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}}dx$ através da mudança de variável (substituição) $x = \sin t$.

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

4. Considere o seguinte domínio plano

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \ y \geq x-2 \ \wedge \ y \leq 3 \ \wedge \ y \leq 4-x^2 \ \wedge \ x \geq 0 \right\}.$$

(a) **[1.5 val.]** Represente o domínio plano D num referencial ortonormado xOy.

(b) **[2 val.]** Escreva o integral (ou soma de integrais) que representa a área de D (**não** calcule).

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

$\boxed{5.}$ Sendo $y = y(x)$, considere a equação diferencial ordinária (EDO) de primeira ordem

$$\frac{dy}{dx} = \frac{(1 + y^2)(2 + x)}{xy}.$$

(a) [2.0 val.] Determine a solução geral da EDO.

(b) [1 val.] Obtenha a solução particular da EDO sujeita à condição $y(e) = 0$.

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

$\boxed{6.}$ **[2.5 val.]** Determine a solução geral da equação diferencial ordinária de primeira ordem

$$y' + \frac{y}{x} = y^2 x \ln x.$$

em que $y = y(x)$ [note que $\ln x$ designa o logarítmo de Neper (base e)].

ESPAÇO PARA RASCUNHO:

FOLHA DE RASCUNHO (não separar esta folha das restantes)

$\boxed{\text{FORMULÁRIO}}$ (não separar esta folha das restantes)

■ **Regras de derivação:** com $u = u(x)$ e $v = v(x)$,

$\boxed{(k \cdot u)' = k \cdot u'}$, com $k \in \mathbb{R}$ $\quad$ $\boxed{(u \pm v)' = u' \pm v'}$

$\boxed{(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'}$ $\quad$ $\boxed{(u^p)' = p \cdot u^{p-1} \cdot u'}$, com $p \in \mathbb{Q}$

$$\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}}, \text{ para } v(x) \neq 0$$

$\boxed{(a^u)' = u' \cdot a^u \cdot \ln a}$, com $a > 0,\ a \neq 1$; em particular: $\boxed{(e^u)' = u' \cdot e^u}$

$\boxed{(\sin u)' = u' \cdot \cos u}$ $\quad$ $\boxed{(\cos u)' = -u' \cdot \sin u}$

$\boxed{(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \cdot \ln a}}$, com $a > 0,\ a \neq 1$; em particular: $\boxed{(\log_e u)' = (\ln u)' = \dfrac{u'}{u}}$

$\boxed{(\arctan u)' = \dfrac{u'}{1+u^2}}$ $\quad$ $\boxed{(\arcsin u)' = \dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}}}$

$\boxed{(\tan u)' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u' \cdot \sec^2 u}$ $\quad$ $\boxed{(\cot u)' = -\dfrac{u'}{\sin^2 u} = -u' \cdot \csc^2 u}$

$\boxed{(\csc u)' = -u' \cdot \cot u \cdot \csc u.}$ $\quad$ $\boxed{(\sec u)' = u' \cdot \tan u \cdot \sec u}$

■ **Primitivação por partes:** $\boxed{\mathcal{P}\,[u'(x) \cdot v(x)] = u(x) \cdot v(x) - \mathcal{P}\,[u(x) \cdot v'(x)]}$

■ **Integração por partes:** $\boxed{\displaystyle\int_a^b u'(x) \cdot v(x)\, dx = [u(x) \cdot v(x)]\,\big|_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x)\, dx}$

■ **Integração por substituição:** $\boxed{\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = \int_{g^{-1}(b)}^{g^{-1}(a)} f\,[g(t)] \cdot g'(t)\, dt}$

■ **Solução geral da EDO linear** $y' + A(x) \cdot y = B(x)$:

$$\boxed{y(x) = e^{-\mathcal{P}\,[A(x)]} \cdot \mathcal{P}\left[\frac{B(x)}{e^{-\mathcal{P}\,[A(x)]}}\right] + K \cdot e^{-\mathcal{P}\,[A(x)]}}, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$

■ **Solução geral da EDO de Bernoulli** $y' + A(x) \cdot y = B(x) \cdot y^n$ (com $n \in \mathbb{Z}$):

$$\boxed{y^{1-n}(x) = e^{(n-1)\cdot\mathcal{P}\,[A(x)]} \cdot (1-n) \cdot \mathcal{P}\left[\frac{B(x)}{e^{(n-1)\mathcal{P}\,[A(x)]}}\right] + K \cdot e^{(n-1)\cdot\mathcal{P}\,[A(x)]}}, \text{ com } K \in \mathbb{R}$$