Resolução de um problema de PL pelo MÉTODO GRÁFICO e pela FORMA PRIMAL do SIMPLEX

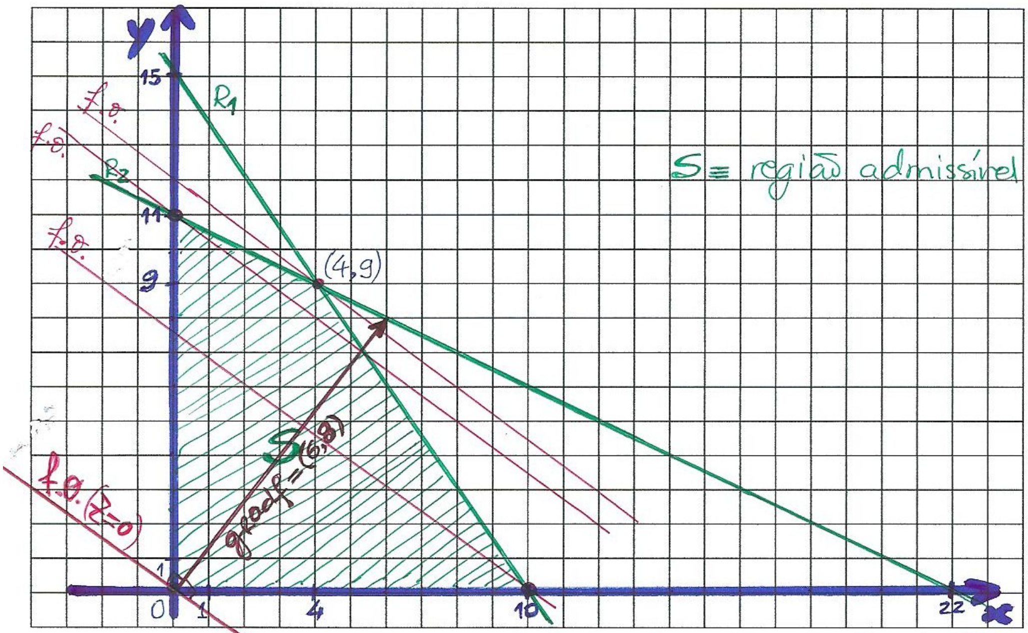
[Docente: Rosário Laureano] [GA4] [2013/14]

Resolução pelo método do Gradiente

Formulação do problema: $\text{MAX } Z = 6x + 8y$

$$\begin{aligned} \text{s.a. } & 30x + 20y \leq 300 \quad R_1 \\ & 5x + 10y \leq 110 \quad R_2 \\ & x \geq 0,\ y \geq 0 \end{aligned}$$

Representação gráfica da região admissível S (ou conj. de oportunidades) num sistema de coordenadas xOy [definida pelas rectas de relaxamento (igualdade) de todas as restrições e consequente intersecção dos (respectivos) semi-planos]:



$m = -\frac{3}{4}$ → vector director da recta: $(4,-3)$

Cálculo/indicação de todos os **pontos extremo**: $(0,0)$, $(10,0)$, $(4,9)$, $(0,11)$

$$\begin{cases} 30x + 20y = 300 \\ 5x + 10y = 110 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{——} \\ x = 22 - 2y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 660 - 60y + 20y = 300 \\ \text{——} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 9 \\ x = 4 \end{cases}$$

Representação no gráfico anterior da recta da função objectivo (f.o.) [escolha, por exemplo, $Z = 0$ pois é o valor da f.o. quando $x = 0 = y$ (inactividade)] $6x + 8y = 0 \Leftrightarrow y = -\frac{6}{8}x = -\frac{3}{4}x$

Cálculo do **vector gradiente** da f.o.:

$$\overrightarrow{grad} f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y), \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = (\underline{\ 6\ }, \underline{\ 8\ })$$ ← indica a direcção e sentido de crescimento da f.o.

Conclusão sobre o **ponto óptimo**: $(x_{opt}, y_{opt}) = (\underline{\ 4\ }, \underline{\ 9\ })$ ← o último ponto a ser varrido pelas sucessivas rectas da f.o.

Indicação do **valor óptimo**: $f(x_{opt}, y_{opt}) = f(\underline{\ 4\ }, \underline{\ 9\ }) = \underline{\ 96\ }$ dado por $6 \times 4 + 8 \times 9$

Resolução pelo método do Simplex (primal e big-M)

Formulação do Problema:

$$\begin{aligned} MAX \quad & Z = 6x + 8y \\ s.a. \quad & 30x + 20y \le 300 \\ & 5x + 10y \le 110 \\ & x \ge 0,\ y \ge 0 \end{aligned}$$

Número n de variáveis de decisão: $n = 2$

Número m de restrições técnicas: $m = 2$

Problema escrito na FORMA NORMAL [1) com variáveis de decisão não-negativas; 2) com termos independentes não-negativos nas restrições técnicas; 3) com as necessárias variáveis de folga e/ou de excesso e/ou artificiais]:

$$\begin{aligned} MAX \quad & Z = 6x + 8y + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 \\ s.a. \quad & 30x + 20y + s_1 = 300 \quad \boxed{R_1} \\ & 5x + 10y + s_2 = 110 \quad \boxed{R_2} \\ & x \ge 0,\ y \ge 0,\ s_1 \ge 0,\ s_2 \ge 0 \end{aligned}$$

Número total N de variáveis [de decisão + auxiliares]: $N = 2 + 2 = 4$

Escolha das variáveis não-básicas (nulas) [no máximo N-m; escolhem-se em 1º lugar as de decisão e nunca as artificiais]: x, y (em número $N - m = 4 - 2 = 2$)

Valor de cada variável básica (não-nula) [obtidos a partir das restrições técnicas]:

$$\left.\begin{aligned} x &= 0 \\ y &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} &\boxed{R_1} \quad 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + s_1 = 300 \Rightarrow s_1 = 300 \\ &\boxed{R_2} \quad 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + s_2 = 110 \Rightarrow s_2 = 110 \end{aligned}$$

Solução básica admissível SBA = $(x, y, s_1, s_2) = (0, 0, 300, 110)$ [variáveis de decisão seguidas das auxiliares p/ ordem de restrição]

Variáveis básicas (s_1, s_2) escritas em função das não-básicas [a partir das restrições técnicas]:

$$\begin{aligned} &\boxed{R_1} \quad 30x + 20y + s_1 = 300 \Rightarrow s_1 = 300 - 30x - 20y \\ &\boxed{R_2} \quad 5x + 10y + s_2 = 110 \Rightarrow s_2 = 110 - 5x - 10y \end{aligned}$$

Função objectivo (f.o.) escrita apenas nas variáveis não-básicas:

$$Z = 6x + 8y + 0 \cdot (300 - 30x - 20y) + 0 \cdot (110 - 5x - 10y) = 6x + 8y$$

QUADRO INICIAL (ou 1º QUADRO): SBA = $(x, y, s_1, s_2) = (0, 0, 300, 110)$

	variáveis	x	y	s_1	s_2					termos independ.
básicas	s_1	30	20	1	0					300
	s_2	5	10	0	1					110
	- f.o. →	-6	-8	0	0					0

(f.o. é nula nas colunas das variáveis básicas)

SUCESSIVOS QUADROS DO SIMPLEX [até que não existam valores negativos na linha da f.o.]:

PREPARAÇÃO DO 2º QUADRO: Elemento negativo de > valor absoluto na f.o.: -8, logo a coluna *pivot* é a 2ª, à qual corresponde a variável não-básica y. Portanto, a variável que **passa a ser básica** é y.

Rácios relativos às $\underbrace{\text{variáveis básicas}}_{s_1,\ s_2}$: para s_1: $\frac{300}{20} = 15$

para s_2: $\frac{110}{10} = 11$

Menor dos rácios não-negativo: 11 logo a linha *pivot* é a 2ª a que corresponde a variável básica s_2. Portanto, a variável que **deixa de ser básica** é s_2.

Operações elementares sobre linhas [1) $\overbrace{\text{elemento } pivot}^{\text{vale } 10}$ = 1; 2) restantes elementos da coluna *pivot* = 0]: $\frac{1}{10} \times L_2 = L'_2$ (nova linha) ⟶ quadro facultativo (e 2º quadro)

2º ~~quadro~~

	variáveis	x	y	s_1	s_2					termos independ.
L_1 →	s_1	30	20	1	0					300
L'_2 →	y	1/2	1	0	1/10					11 → rácio escolhido
L_3 →	- f.o. →	-6	-8	0	0					valor: 0

(FACULTATIVO: quadro auxiliar com o elemento *pivot* a 1)

2º QUADRO:

	variáveis	x	y	s_1	s_2					termos independ.
L'_1 →	s_1	20	0	1	-2					80
L'_2 →	y	1/2	1	0	1/10					11
L'_3 →	- f.o. →	-2	0	0	4/5					valor: 88

(f.o. é nula nas colunas das variáveis básicas) → porque x e s_2 são var. não-básicas

SBA = $(x, y, s_1, s_2) = (0, \underbrace{11, 80}_{\text{da última coluna do quadro}}, 0)$ e o valor da f.o. na SBA é 88.

porque existem elementos negativos na linha da f.o.

PREPARAÇÃO DO 3 º QUADRO: Elemento negativo de > valor absoluto na f.o.: −2, logo a coluna *pivot* é a 1ª, à qual corresponde a variável não-básica x. Portanto, a variável que **passa a ser básica** é x.

Rácios relativos às $\underbrace{\text{variáveis básicas}}_{s_1,\, y}$:

para s_1: $\frac{80}{20} = 4$

para y: $\frac{11}{1/2} = 22$

Menor dos rácios não-negativo: 4 logo a linha *pivot* é a 1ª a que corresponde a variável básica s_1. Portanto, a variável que **deixa de ser básica** é s_1.

Operações elementares sobre linhas [1) elemento *pivot* = 1; 2) restantes elementos da coluna *pivot* = 0]:

vale 20

$\frac{1}{20} \times L'_1 = L''_1$ ⟶ quadro facultativo (e 3º quadro)

$-\frac{1}{2} \times L''_1 + L'_2 = L''_2$, $2 \times L''_1 + L'_3 = L''_3$ ⟶ 3º quadro

3º ~~Qua~~dro

	variáveis	x	y	s_1	s_2					termos independ.	
L''_1 →	x	1	0	1/20	−1/10					4	→ rácio escolhido
L'_2 →	y	1/2	1	0	1/10					11	
L'_3 →	- f.o. →	−2	0	0	4/5					valor: 88	

(FACULTATIVO: quadro auxiliar com o elemento *pivot* a 1)

3 º QUADRO:

	variáveis	x	y	s_1	s_2					termos independ.
L''_1 →	x	1	0	1/20	−1/10					4
L''_2 →	y	0	1	−1/40	3/20					9
L''_3 →	- f.o. →	0	0	1/10	3/5					valor: 96

(f.o. é nula nas colunas das variáveis básicas)

SBA = $(x, y, s_1, s_2) = (\underbrace{4, 9}_{\text{da última coluna do quadro}}, \underbrace{0, 0}_{\text{porque são var. não-básicas}})$ e o valor da f.o. na SBA é $\underbrace{96}_{\text{da última célula do quadro}}$.

Dado que ∄ elementos negativos na linha da f.o., então está encontrada a solução óptima $(x, y, s_1, s_2) = (4, 9, 0, 0)$, o ponto óptimo $(x, y) = (4, 9)$ (só as var. de decisão) e o valor óptimo $Z = 96$.

Na solução óptima temos $s_1 = 0$ e $s_2 = 0$, o que significa que são gastos todos os recursos ($\underbrace{\text{madeira}}_{s_1}$ e $\underbrace{\text{horas}}_{s_2}$)