

Resolução de um problema de PL pela FORMA BIG-M do SIMPLEX

[Docente: Rosário Laureano] [GA4] [2013/14]

Formulação do Problema:

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= x - y + 4z \\ \text{s.a. } -3x + y + z &\geq -3 \\ 2x - y + z &\geq 2 \\ x - 2y + 3z &= 6 \\ x \geq 0, y \leq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

Número n de variáveis de decisão: $m=3$

Número m de restrições técnicas: $m=3$

Problema escrito na FORMA NORMAL [1] com variáveis de decisão não-negativas; 2) com termos independentes não-negativos nas restrições técnicas; 3) com as necessárias variáveis de folga e/ou de excesso e/ou artificiais]:

~~NORMAL~~

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= x + Y + 4z \\ \text{s.a. } -3x - Y + z &\geq -3 \\ 2x + Y + z &\geq 2 \\ x + 2Y + 3z &= 6 \\ x \geq 0, Y \geq 0, z \geq 0 \end{aligned}$$

~~NORMAL~~

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= x + Y + 4z \\ \text{s.a. } 3x + Y - z &\leq 3 \\ 2x + Y + z &\geq 2 \\ x + 2Y + 3z &= 6 \\ x, Y, z \geq 0 \end{aligned}$$

em que M representa um m^2 positivo suficientemente elevado $-M \cdot u_2 - M \cdot u_3$

$$\begin{aligned} \text{MAX } Z &= x + Y + 4z + 0 \cdot \Delta_1 + 0 \cdot t_2 \\ \text{s.a. } 3x + Y - z + \Delta_1 &= 3 \\ 2x + Y + z - t_2 + u_2 &= 2 \\ x + 2Y + 3z + u_3 &= 6 \\ x, Y, z \geq 0 \\ \Delta_1, t_2, u_2, u_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Número total N de variáveis [de decisão + auxiliares]: $N=3+4=7$

Escolha das variáveis não-básicas (nulas) [no máximo $N-m$; escolhem-se em 1º lugar as de decisão e nunca as artificiais]: x, Y, z, t_2 (em número $N-m=7-3=4$)

Valor de cada variável básica (não-nula) [obtidos a partir das restrições técnicas]:

$$\begin{aligned} x=0=Y=z=t_2 &\Rightarrow [R_1] 3 \cdot 0 + 0 - 0 + \Delta_1 = 3 \Leftrightarrow \Delta_1 = 3, [R_3] 0 + 2 \cdot 0 + 3 \cdot 0 + u_3 = 6 \\ &\Rightarrow [R_2] 2 \cdot 0 + 0 + 0 - 0 + u_2 = 2 \Leftrightarrow u_2 = 2, \Leftrightarrow u_3 = 6 \end{aligned}$$

Solução básica admissível SBA = $(x, Y, z, \Delta_1, t_2, u_2, u_3) = (0, 0, 0, 3, 0, 2, 6)$ [variáveis de decisão seguidas das auxiliares p/ ordem de restrição]

Variáveis básicas escritas em função das não-básicas [a partir das restrições técnicas]:

$$\begin{aligned} [R_1] 3x + Y - z + \Delta_1 &= 3 \Leftrightarrow \Delta_1 = 3 - 3x - Y + z, [R_2] 2x + Y + z - t_2 + u_2 = 2 \\ [R_3] x + 2Y + 3z + u_3 &= 6 \Leftrightarrow u_3 = 6 - x - 2Y - 3z \Leftrightarrow u_2 = 2 - 2x - Y - z + t_2 \end{aligned}$$

Função objectivo (f.o.) escrita apenas nas variáveis não-básicas:

$$\begin{aligned} Z &= x + Y + 4z + 0 \cdot (3 - 3x - Y + z) + 0 \cdot t_2 - M \cdot (2 - 2x - Y - z + t_2) - M \cdot (6 - x - 2Y - 3z) \\ Z &= (1 + 2M + M) \cdot x + (1 + M + 2M) \cdot Y + (4 + M + 3M) \cdot z + (-M) \cdot t_2 + (-2M - 6M) \\ Z &= (1 + 3M) \cdot x + (1 + 3M) \cdot Y + (4 + 4M) \cdot z - M \cdot t_2 - 8M \end{aligned}$$

⊛ De $x=Y=z=0$ segue $\Delta_1 = 3 \neq 0$, logo Δ_1 é básica (por R_1)
 $t_2 + u_2 = 2$ (por R_2) e nunca se escolhe artificial para não-básica
 $u_3 = 6 \neq 0$ (por R_3), logo u_3 é básica

QUADRO INICIAL (ou 1º QUADRO): SBA = $(x, y, z, s_1, t_2, u_2, u_3) = (0, 0, 0, 3, 0, 2, 6)$

variáveis	x	y	z	s ₁	t ₂	u ₂	u ₃	termos independ.
s ₁	3	1	-1	1	0	0	0	3
u ₂	2	1	1	0	-1	1	0	2
u ₃	1	2	3	0	0	0	1	6
- f.o. →	-1-3M	-1-3M	-4-4M	0	M	0	0	-8M

(f.o. é nula nas colunas das variáveis básicas)

basicas {

não "simetriza"

SUCCESSIVOS QUADROS DO SIMPLEX [até que não existam valores negativos na linha da f.o.]:

PREPARAÇÃO DO 2º QUADRO: Elemento negativo de > valor absoluto na f.o.: $-4-4M$, logo a coluna pivot é a 3ª, à qual corresponde a variável não-básica z. Portanto, a variável que **passa a ser básica** é z.

Rácios relativos às variáveis básicas: para s₁: $\frac{3}{-1} = -3$
 para u₂: $\frac{2}{1} = 2$
 para u₃: $\frac{6}{3} = 2$
 Menor dos rácios não-negativo: 2 logo a linha pivot é a 2ª a que corresponde a variável básica u₂. Portanto, a variável que **deixa de ser básica** é u₂.

para u₂: $\frac{2}{1} = 2$ **Empate** $\rightarrow$ podemos em si-dele a 3ª (u₃)

já vale 1

Operações elementares sobre linhas [1] elemento pivot = 1; 2) restantes elementos da coluna pivot = 0]:

$L_2 + L_1 = L'_1$
 $-3 \times L_2 + L_3 = L'_3$
 $(4+4M) \times L_4 = L'_4$

→ 2º Quadro

melhor escolha pois o elemento pivot já está = 1

variáveis								termos independ.
- f.o. →								valor:

(FACULTATIVO: quadro auxiliar com o elemento pivot a 1)

2º QUADRO:

variáveis	x	y	z	s ₁	t ₂	u ₂	u ₃	termos independ.
L' ₁ → s ₁	5	2	0	1	-1	1	0	5
L' ₂ → z	2	1	1	0	-1	1	0	2
L' ₃ → u ₃	-5	-1	0	0	3	-3	1	0
L' ₄ → - f.o. →	7+5M	3+M	0	0	-4-3M	4+4M	0	valor: 8

(f.o. é nula nas colunas das variáveis básicas)

→ SBA degenerada

SBA = $(x, y, z, s_1, t_2, u_2, u_3) = (0, 0, 2, 5, 0, 0, 0)$ e o valor da f.o. na SBA é 8.

esta SBA diz-se degenerada porque uma das var. básicas é nula (u₂=0). tal é consequência do "empate" em $\oplus$

porque $\exists$ elementos negativos na linha da f.o.

PREPARAÇÃO DO 3º QUADRO: Elemento negativo de > valor absoluto na f.o.: $-4-3M$, logo a coluna pivot é a 5ª, à qual corresponde a variável não-básica t_2 . Portanto, a variável que passa a ser básica é t_2 .

Rácios relativos às variáveis básicas: para Δ_1 : $\frac{5}{-1} = -5$
para z : $\frac{2}{-1} = -2$
para u_3 : $\frac{-1}{3} = 0^+$

Menor dos rácios não-negativos: 0 logo a linha pivot é a 3ª a que corresponde a variável básica u_3 . Portanto, a variável que deixa de ser básica é u_3 .

Operações elementares sobre linhas [1] elemento pivot = 1; 2) restantes elementos da coluna rule 3
pivot = 0]: $\frac{1}{3} \times L'_3 = L''_3$ (nova linha) $\rightarrow$ quadro facultativo (e 3º quadro)
 $L''_3 + L'_1 = L''_1$, $L''_3 + L'_2 = L''_2$, $(4+3M) \times L''_3 + L'_4 = L''_4$

3º Quadro

variáveis	x	y	z	Δ_1	t_2	u_2	u_3		termos independ.
$L'_1 \rightarrow$	Δ_1	5	2	0	1	-1	1	0	5
$L'_2 \rightarrow$	z	2	1	1	0	-1	1	0	2
$L'_3 \rightarrow$	t_2	$-5/3$	$-1/3$	0	0	1	-1	$1/3$	0
$L'_4 \rightarrow$	-f.o. $\rightarrow$	$7+5M$	$3+M$	0	0	$-4-3M$	$4+4M$	0	valor: 8

(FACULTATIVO: quadro auxiliar com o elemento pivot a 1)

3º QUADRO:

variáveis	x	y	z	Δ_1	t_2	u_2	u_3		termos independ.
$L''_1 \rightarrow$	Δ_1	$10/3$	$5/3$	0	1	0	$1/3$		5
$L''_2 \rightarrow$	z	$1/3$	$2/3$	1	0	0	$1/3$		2
$L''_3 \rightarrow$	t_2	$-5/3$	$-1/3$	0	0	1	$1/3$		0
$L''_4 \rightarrow$	-f.o. $\rightarrow$	$1/3$	$5/3$	0	0	M	$4/3+M$		valor: 8

(f.o. é nula nas colunas das variáveis básicas)

$$SBA = (x, y, z, \Delta_1, t_2, u_2, u_3) = (0, 0, 2, 5, 0, 0, 0)$$

é degenerada porque a var. básica t_2 é nula

a mesma do quadro anterior

indicado no quadro

o mesmo do quadro anterior
esta repetição é em sequência de *

Dado que $\exists$ elementos negativos na linha da f.o., entã esta encontrada a solução ótima $(x, y, z, \Delta_1, t_2, u_2, u_3) = (0, 0, 2, 5, 0, 0, 0)$, o pto ótimo $(x, y, z) = (0, 0, 2)$ e o valor ótimo $z = 8 = 0 - 0 + 4 \cdot 2$

pela expressão da f.o. $z = x - y + 4z$

Nota: embora não tenha ocorrido alteração da SBA do 2º para o 3º quadro, apenas o 3º quadro é o quadro ótimo: é nele que estão presentes os preços sombreados (sempre relativos aos recursos)